9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 1)

$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 30°$， $\angle B = 45°$，求 $a : b : c$ 的值．

解答　$\sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3}+1)$

解析　$\angle C = 180° - 30° - 45° = 105°$

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = \sin 30° : \sin 45° : \sin 105° = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} =$

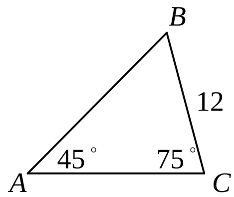
$\sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3}+1)$ ．

9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 2)

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45°$， $\angle C = 75°$， $\overline{BC} = 12$， 求

(1) $\overline{AC}$ 長．

(2) $\triangle ABC$ 外接圓半徑．



解答　(1) $6\sqrt{6}$;(2) $6\sqrt{2}$

解析　(1) $\angle B = 180° - 45° - 75° = 60°$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得

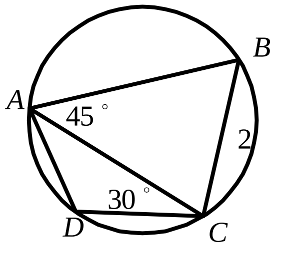
$\frac{12}{\sin 45°} = \frac{\overline{AC}}{\sin 60°} \Rightarrow \frac{12}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\overline{AC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \overline{AC} = 6\sqrt{6}$ ．

(2) 由 $2R = \frac{12}{\sin 45°} = \frac{12}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 12\sqrt{2}$， 得 $\triangle ABC$ 外接圓半徑 $R =$ $6\sqrt{2}$ ．

9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 3)

如圖，圓內接四邊形 $ABCD$ 中，

$\angle BAC=45°$、$\angle ACD=30°$、$\overline{BC}=2$，試求 $\overline{AD}=$______________．

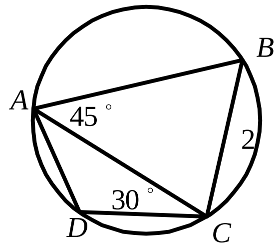


【建國中學月考】

解答　$\sqrt{2}$

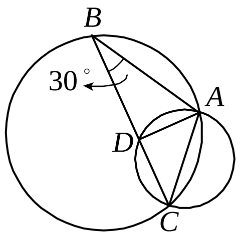
解析　∵　$\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$ 之外接圓相等

由正弦定理知 $\dfrac{2}{\sin 45°}=2R=\dfrac{\overline{AD}}{\sin 30°}$　$\Rightarrow$　$\overline{AD}=\sqrt{2}$．



9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 4)

如圖，D 為 $\overline{BC}$ 上一點，$\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$ 的外接圓半徑比為 2：1，且 $\angle ABD=30°$．試求 $\angle ADC=$ ？



解答　$90°$

解析　設 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R_1，$\triangle ACD$ 的外接圓半徑為 R_2

由正弦定理 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin 30°}=2R_1$，$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\angle ADC}=2R_2$

依題意，$R_1=2R_2$

$\Rightarrow$　$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 30°}=2R_1=4R_2=\dfrac{2\overline{AC}}{\sin\angle ADC}$　$\Rightarrow$　$\sin\angle ADC=1$　$\Rightarrow$　$\angle ADC=90°$．

9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 5)

設△ABC 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，求 $\overline{BC}$ 的長．

解答　$\sqrt{2}$

解析　在△ABC 中，利用餘弦定理 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A$，得

$\overline{BC}^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\cos 30°$，

解得 $\overline{BC}^2=2$，即 $\overline{BC}=\sqrt{2}$ ．

9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 6)

△ABC 中，a，b，c 分別表示△ABC 三內角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的對邊長．已知 $\sin A$：$\sin B$：$\sin C=3$：5：7．試求：

(1)a：b：c．

(2)$\cos A$：$\cos B$：$\cos C$．

(3)最大內角為?

解答　(1)3：5：7;(2)13：11：(-7);(3)120°

解析　(1)由正弦定理得 a：b：$c=\sin A$：$\sin B$：$\sin C=3$：5：7．

(2)由(1)，令 $a=3t$，$b=5t$，$c=7t$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25t^2+49t^2-9t^2}{2\times 5t\times 7t}=\frac{13}{14}\qquad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9t^2+49t^2-25t^2}{2\times 3t\times 7t}=\frac{11}{14}$$

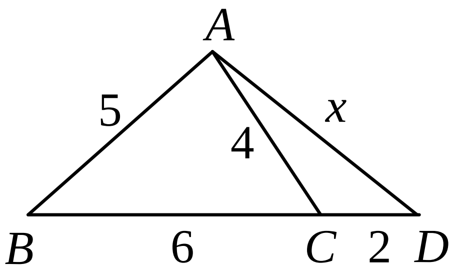
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9t^2+25t^2-49t^2}{2\times 3t\times 5t}=-\frac{1}{2}$$

$\cos A$：$\cos B$：$\cos C=\frac{13}{14}$：$\frac{11}{14}$：$(-\frac{1}{2})=13$：11：(-7)．

(3)由於 $\cos C=-\frac{1}{2}<0$，故最大角為 $\angle C=120°$．

9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 7)

如圖，求 x＝____________．



解答　$\sqrt{29}$

解析　$\triangle ABC$ 中， $\cos B=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}$

$\triangle ABD$ 中， $\cos B=\dfrac{5^2+8^2-x^2}{2\cdot5\cdot8}$

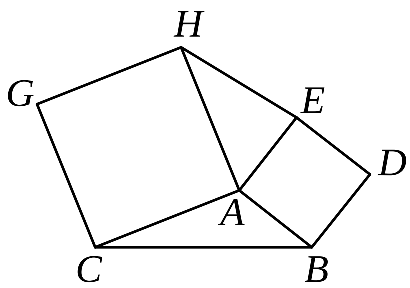
$\Rightarrow\quad \dfrac{25+36-16}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{25+64-x^2}{2\cdot5\cdot8}\quad\Rightarrow\quad x^2=29\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{29}$ ．

9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 8)

$\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=3$， $\overline{AC}=5$， $\overline{BC}=7$， 現在以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 分別作正方形 $ABDE$ 與正方形 $ACGH$，試求：

(1) $\overline{EH}=$？

(2) $\triangle EAH$ 面積 ．



解答　(1) $\sqrt{19}$;(2) $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

解析　(1) $\cos\angle CAB=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}$

$\overline{EH}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos\angle EAH=9+25-30\times\cos(180^\circ-\angle CAB)$

$=9+25-30\times(-\cos\angle CAB)=34-30\times(\dfrac{1}{2})=19\quad\Rightarrow\quad \overline{EH}=\sqrt{19}$ ．

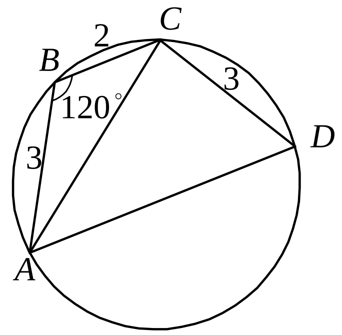
(2)由(1)知 $\cos\angle EAH=\cos(180^\circ-\angle CAB)=-\cos\angle CAB=\dfrac{1}{2}$

$\sin\angle EAH=\sqrt{1-\cos^2(\angle EAH)}=\sqrt{1-(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle EAH$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\overline{AH}\times\overline{AE}\times\sin\angle EAH=\dfrac{1}{2}\times5\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 9)

圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\angle ABC=120^\circ$，
求(1) $\overline{AD}$ 的長．(2)此四邊形的面積．



解答　(1)5;(2) $\frac{21}{4}\sqrt{3}$

解析　連接 $\overline{AC}$

(1)在△ABC 中，由餘弦定理得知，
$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos120^\circ=19$，因此，$\overline{AC}=\sqrt{19}$．
因為 $ABCD$ 為圓內接四邊形，且 $\angle ABC=120^\circ$，
所以 $\angle ADC=60^\circ$．
假設 $\overline{AD}=x$．△ACD 中，由餘弦定理得知，
$\overline{AC}^2=3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot\cos60^\circ$，即 $19=x^2-3x+9$，
推得 $x^2-3x-10=0$．解得 $x=5$ 或 -2（不合）．故 $\overline{AD}=5$．

(2)此四邊形的面積為△ABC 與△ACD 面積之和．
由三角形的面積公式得知，
△ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\sin120^\circ=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，
△ACD 的面積為 $\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin60^\circ=\frac{15}{4}\sqrt{3}$．
故此四邊形的面積為 $\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{15}{4}\sqrt{3}=\frac{21}{4}\sqrt{3}$．

9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 10)

在△ABC 中，a，b，c 分別為 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的對邊，且 $(a+b+c)(a+b-c)=ab$，求 $\angle C$ 的度數．

解答　120°

解析　由 $(a+b+c)(a+b-c)=ab$，整理得 $a^2+2ab+b^2-c^2=ab$，即 $a^2+b^2-c^2=-ab$，
由餘弦定理 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$，故 $\angle C=120^\circ$．

9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 11)

在△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=8$，$\overline{CA}=7$，若 D 為 $\overline{BC}$ 中點，求中線 $\overline{AD}$ 長．	

解答　$\sqrt{21}$

解析　利用中線定理

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$，

$5^2+7^2=2(\overline{AD}^2+4^2)$，得 $\overline{AD}^2=21$，即 $\overline{AD}=\sqrt{21}$ ．

9-3 正弦定理與餘弦定理(常考題型 12)

在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=5$，$\overline{BM}$ 為 $\overline{AC}$ 邊上的中線，求 $\overline{BM}$ ．	

解答　$\dfrac{\sqrt{46}}{2}$