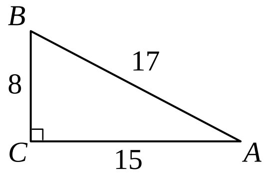
9-1 直角三角形的邊角關係(常考題型 1)

在直角△ABC 中，已知 $\overline{AB}=17$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AC}=15$，試求 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 之值．

解答　$\sin A=\dfrac{8}{17}$，$\cos A=\dfrac{15}{17}$，$\tan A=\dfrac{8}{15}$

解析　必須先將圖形正確畫出，確認∠A 的對邊及鄰邊．

如下圖，



所以 $\sin A=\dfrac{8}{17}$，$\cos A=\dfrac{15}{17}$，$\tan A=\dfrac{8}{15}$ ．

9-1 直角三角形的邊角關係(常考題型 2)

$\tan^2 30°+\sin 45°\cdot\cos 45°-\sin^2 60°=$______________ ．

解答　$\dfrac{1}{12}$

解析　原式 $=(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{4+6-9}{12}=\dfrac{1}{12}$ ．

9-1 直角三角形的邊角關係(常考題型 3)

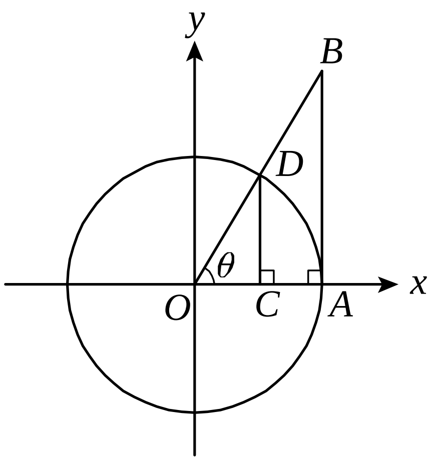
試比較
(1)$\sin 44°$，$\sin 43°$，$\sin 42°$的大小關係．
(2)$\cos 50°$，$\cos 51°$，$\cos 52°$的大小關係．
(3)$\tan 49°$，$\tan 45°$，$\tan 42°$，1 的大小關係．

解答　(1) $\sin 44° > \sin 43° > \sin 42°$;(2) $\cos 50° > \cos 51° > \cos 52°$;(3) $\tan 49° > \tan 45° = 1 > \tan 42°$.

解析　定義與圖形可知 $0° < \theta < 90°$，θ越大，$\sin\theta$與 $\tan\theta$越大，$\cos\theta$越小，故 $\sin 44° > \sin 43° > \sin 42°$; $\cos 50° > \cos 51° > \cos 52°$;$\tan 49° > \tan 45° = 1 > \tan 42°$.

9-1 直角三角形的邊角關係(常考題型 4)

如圖，$0° < \theta < 90°$，$\overline{AB}$為單位圓（半徑為 1 的圓）的切線段．請以 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 表示下列線段長：
(1) $\overline{AB} =$ ________ ．
(2) $\overline{CD} =$ ________ ．
(3) $\overline{OC} =$ ________ ．



解答　(1)$\tan\theta$;(2)$\sin\theta$;(3)$\cos\theta$

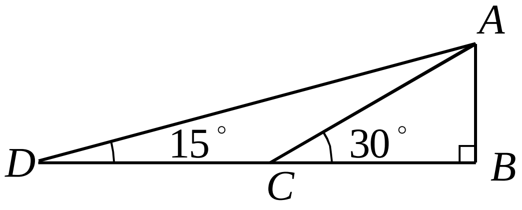
解析　(1)$\because \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \tan\theta \Rightarrow \overline{AB} = \tan\theta$．

(2)$\because \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \sin\theta \Rightarrow \overline{CD} = \sin\theta$．

(3)$\because \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \cos\theta \Rightarrow \overline{OC} = \cos\theta$．

9-1 直角三角形的邊角關係(常考題型 5)

試利用右圖求出 $\tan 15°$的值．



解答　$\tan 15° = 2-\sqrt{3}$

解析　$\triangle ABC$ 為 $30°–60°–90°$的三角形，令$\overline{AB}=1$，則$\overline{BC}=\sqrt{3}$， $\overline{AC}=2$．

因為 $\angle ACB$ 為$\triangle ACD$ 的外角，所以 $\angle DAC = \angle ACB - \angle ADC = 30° - 15°$ $= 15°$，即$\overline{CD}=\overline{AC}=2$．故 $\tan 15° = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ ．

9-1 直角三角形的邊角關係(常考題型 6)

求下列各式的值：

(1)$\sin^2 21° + \sin^2 69°$ ．

(2)$\tan 70° \tan 20°$ ．

(3)$\dfrac{1}{\tan^2 57°} - \dfrac{1}{\cos^2 33°}$ ．

解答　(1)1;(2)1;(3) − 1

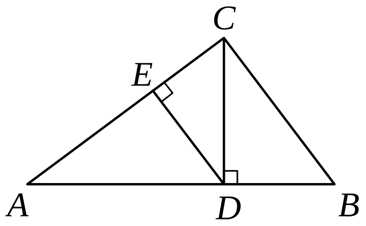
解析　(1)$\sin^2 21° + \sin^2 69° = \sin^2 21° + \cos^2 21° = 1$ ．

(2)$\tan 70° \tan 20° = \dfrac{\sin 70°}{\cos 70°} \times \dfrac{\sin 20°}{\cos 20°} = \dfrac{\sin 70°}{\cos 70°} \times \dfrac{\cos 70°}{\sin 70°} = 1$ ．

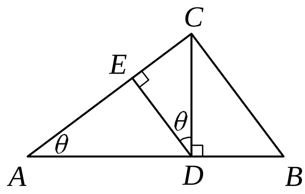
(3)$\dfrac{1}{\tan^2 57°} - \dfrac{1}{\cos^2 33°} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin^2 57°}{\cos^2 57°}} - \dfrac{1}{\sin^2 57°} = \dfrac{\cos^2 57° - 1}{\sin^2 57°} = \dfrac{-\sin^2 57°}{\sin^2 57°} = -1$ ．

9-1 直角三角形的邊角關係(常考題型 7)

直角$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=3$，自 C 作$\overline{CD}$垂直$\overline{AB}$於 D，作$\overline{DE}$垂直$\overline{AC}$於 E，求$\overline{DE}=$______________ .



解答　$\frac{48}{25}$



解析　令$\angle A=\theta$，則$\angle CDE=\theta$

$\triangle ABC$ 中，$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{4}{5}$

$\triangle ACD$ 中，$\sin\theta=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$　$\Rightarrow$　$\overline{CD}=\overline{AC}\times\sin\theta=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

$\triangle CDE$ 中，$\cos\theta=\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}$　$\Rightarrow$　$\overline{DE}=\overline{CD}\times\cos\theta=\frac{12}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{48}{25}$.

9-1 直角三角形的邊角關係(常考題型 8)

平方關係式完成下列空格：$\sin^2 43°+\cos^2 43°=$____________ .

解答　1

解析　$\sin^2 43°+\cos^2 43°=1$.

9-1 直角三角形的邊角關係(常考題型 9)

利用商數關係式完成下列空格：

$\dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}=$ ①______________，$\tan 20^\circ \cdot \cos 20^\circ =$ ②______________ .

解答　①$\tan 18^\circ$②$\sin 20^\circ$

解析　$\dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\tan 18^\circ$，$\tan 20^\circ \cdot \cos 20^\circ = \sin 20^\circ$.

9-1 直角三角形的邊角關係(常考題型 10)

若 $\tan\theta$，$\dfrac{1}{\tan\theta}$為方程式 $x^2-4x+1=0$ 之二根，

求 $\sin\theta\cdot\cos\theta=$______________ .

解答　$\dfrac{1}{4}$

解析　由根與係數關係得

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4 \quad\Rightarrow\quad \tan\theta+\cot\theta=4 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=4 \quad\Rightarrow \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{4}$.