

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 1)

1. 若 $f(x) = 2011x + 99$, 則 $\frac{f(345) - f(246)}{246 - 345} = \underline{\hspace{2cm}}$.



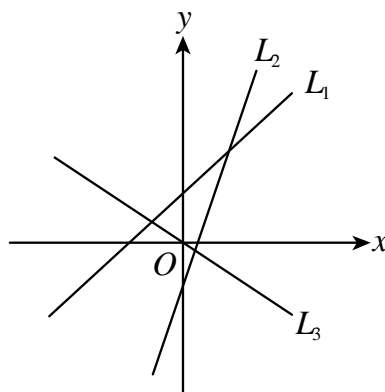
解答 -2011

解析 所求是直線 $y = 2011x + 99$ 的斜率加負號, 故所求 -2011 .

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 2)

1. 如圖, 三直線 L_1, L_2, L_3 的方程式分別為 $L_1: y = a_1x + b_1$, $L_2: y = a_2x + b_2$, $L_3: y = a_3x + b_3$. 選出正確的選項:

- (1) $a_1 > 0$ (2) $a_1 > a_2$ (3) $a_3 < 0$
(4) $b_1 > 0$ (5) $b_2 > b_3$



解答 134

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 3)

1. 設 $f(x)$ 為一次函數, 且 $f(1) = 1, f(2) = 4$, 則 $f(3) =$ _____.



解答 7

解析 設 $f(x) = ax + b$, 則 $a + b = 1 \dots (1)$, $2a + b = 4 \dots (2)$,

由(1)(2)解得 $a = 3, b = -2$, $\therefore f(x) = 3x - 2, f(3) = 9 - 2 = 7$.

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 4)

1. 試作下列各二次函數的圖形, 並求出對稱軸的方程式及頂點坐標: (1) $y = x^2 - 2x$. (2) $y = -2x^2 + x + 1$.



解答 (1) 對稱軸: $x = 1$, 頂點: $(1, -1)$; (2) 對稱軸: $x = \frac{1}{4}$, 頂點: $(\frac{1}{4}, \frac{9}{8})$

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 5)

1. 試分別求滿足下列條件的二次函數：

(1) 對稱軸為直線 $x=1$ ，通過點 $(2,1)$ 與 $(-1,-5)$ 。

(2) 過三點 $(-1,2)$ ， $(0,6)$ ， $(1,12)$ 。

(3) 過點 $(0,-11)$ ， $(2,1)$ ， $(3,1)$ 。



解答 (1) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$; (2) $f(x) = x^2 + 5x + 6$; (3) $f(x) = -2x^2 + 10x - 11$

解析 (1) 設 $f(x) = a(x-1)^2 + k$ ，過點 $(2,1)$ ， $(-1,-5)$

$$\text{則} \begin{cases} 1 = a + k \\ -5 = 4a + k \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = -2 \\ k = 3 \end{cases} \therefore f(x) = -2(x-1)^2 + 3 = -2x^2 + 4x + 1.$$

(2) 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，其中 $a \neq 0$ ， \therefore 過三點 $(-1,2)$ ， $(0,6)$ ， $(1,12)$

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 2 \\ c = 6 \\ a + b + c = 12 \end{cases}, \text{解之得 } a = 1, b = 5, c = 6 \Rightarrow f(x) = x^2 + 5x + 6.$$

(3) 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，其中 $a \neq 0$ ， \therefore 過三點 $(0,-11)$ ， $(2,1)$ ， $(3,1)$

$$\therefore \begin{cases} c = -11 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases}, \text{解之得 } a = -2, b = 10, c = -11$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x^2 + 10x - 11.$$

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 6)

1. 若將 $y = 2x^2 + 4x + 2$ 之函數圖形向右平移 h 單位，向上平移 k 單位，會與 $y = a(x-1)^2 + 4$ 圖形重合，

則(1) $a =$ _____，(2) $h =$ _____，(3) $k =$ _____。



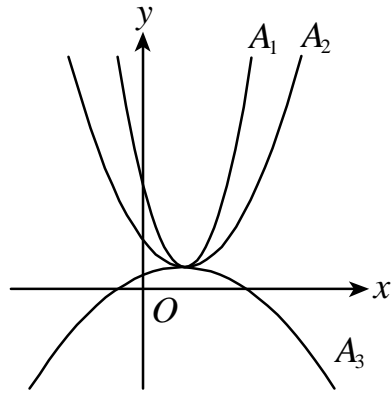
解答 (1)2;(2)2;(3)4

解析 $y = 2(x^2 + 2x) + 2 = 2(x+1)^2$ ，頂點坐標為 $(-1,0)$ ， $y = a(x-1)^2 + 4$ ，頂點坐標為 $(1,4)$ $\therefore y = 2x^2 + 4x + 2$ 向右平移 h 單位，向上平移 k 單位，會與 $y = a(x-1)^2 + 4$ 之圖形重合 $\therefore a = 2$ ， $(-1,0)$ 向右平移 h 單位，向上平移 k 單位會與 $(1,4)$ 重合 $\Rightarrow -1 + h = 1, k = 4, \therefore h = 2, k = 4.$

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 7)

1. 右圖為三共頂點的拋物線，其方程式分別為 $A_1: y = a_1(x - 2)^2 + 1$, $A_2: y = a_2(x - 2)^2 + 1$, $A_3: y = a_3(x - 2)^2 + 1$. 選出正確的選項：

- (1) $a_1 > 0$ (2) $a_2 < 0$ (3) $a_3 > 0$
 (4) $a_2 > a_1 > a_3$ (5) $a_1 + a_3 > 0$



解答

15

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 8)

1. 設 $f(x) = ax^2 + 3x + (2 - a)$ (a 是實數, $a \neq 0$) 的圖形經過四個象限, 則 a 的範圍為_____.

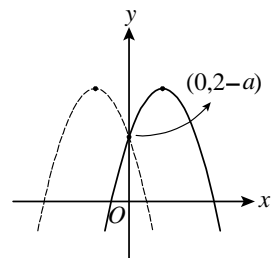


解答

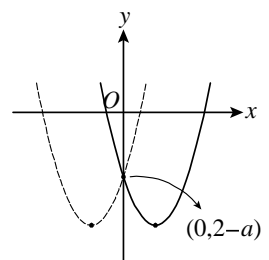
$a < 0$ 或 $a > 2$

解析

(1) 若開口向下 ($a < 0$), 則 $(0, 2 - a)$ 在 y 軸正向 $\Rightarrow 2 - a > 0 \Rightarrow a < 2, \therefore a < 0$.



(2) 若開口向上 ($a > 0$), 則 $(0, 2 - a)$ 在 y 軸負向 $\Rightarrow 2 - a < 0 \Rightarrow a > 2, \therefore a > 2$.



4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 9)

1. 設拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 過兩點 $A(-1,3)$, $B(3,3)$, 且頂點在直線 $3x - 2y + 7 = 0$ 上, 則此拋物線的方程式為_____.



解答 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 5$

解析 \because 拋物線通過水平線 $y=3$ 上的 $A(-1,3)$, $B(3,3)$ 兩點,
 \therefore 對稱軸為 \overline{AB} 的中垂線 $x=1 \dots (1)$, 又頂點在 $3x - 2y + 7 = 0$ 線上 $\dots (2)$, 由(1)(2)可得頂點為 $V(1,5)$,
 \therefore 拋物線可設為 $y = a(x-1)^2 + 5 \dots (*)$, $A(-1,3)$ 代入(*)式得 $3 = 4a + 5 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$, \therefore 拋物線的方程式為 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 5$.

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 10)

1. (1)對於任意實數 x , $x^2 - 8x + k$ 的值恆為正數, 則實數 k 的範圍為_____.
(2)對於任意實數 x , $-2x^2 - 8x + t$ 的值恆為負數, 則實數 t 的範圍為_____.



解答 (1) $k > 16$; (2) $t < -8$

解析 (1) $y = x^2 - 8x + k$ 的值恆為正數, 表示 $y = x^2 - 8x + k$ 的開口向上且與 x 軸不相交 \therefore 判別式 $D = b^2 - 4ac = 64 - 4k < 0 \Rightarrow k > 16$. (2) $y = -2x^2 - 8x + t$ 的值恆為負數, 表示 $y = -2x^2 - 8x + t$ 的開口向下且與 x 軸不相交 \therefore 判別式 $D = b^2 - 4ac = 64 + 8t < 0 \Rightarrow t < -8$.

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 11)

1. 已知二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$ 在 $x=2$ 時有最大值 3, 則 $(a,b)=$ _____ .



解答 $(-1,4)$

解析 因為在 $x=2$ 時有最大值 3,

$$\text{所以 } y=f(x)=a(x-2)^2+3=ax^2-4ax+4a+3,$$

$$\text{與 } y=f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a} \text{ 比較係數, 得 } \begin{cases} b=-4a & \dots \textcircled{1} \\ \frac{1}{a}=4a+3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{由 } \textcircled{2} \text{ 得 } 4a^2+3a-1=0 \Rightarrow (4a-1)(a+1)=0 \Rightarrow a=\frac{1}{4} \text{ 或 } -1,$$

因函數有最大值, 所以 $a < 0$, 故 $a = -1$, 代入 $\textcircled{1}$ 得 $b = 4$.

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 12)

1. 設 x, y 是實數, 滿足 $x+2y=4, x \geq 0, y \geq 0$, 求 x^2+y^2 的最大值與最小值.



解答 最大值 16, 最小值 $\frac{16}{5}$

解析 由 $x=4-2y \geq 0$ 及 $y \geq 0$, 得 $0 \leq y \leq 2$

$$\text{又 } x^2+y^2=(4-2y)^2+y^2=5y^2-16y+16=5\left(y-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$$

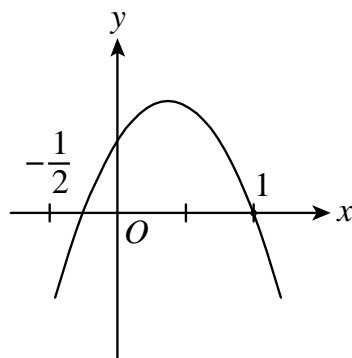
當 $y=0$ 時, x^2+y^2 有最大值 16, 當 $y=\frac{8}{5}$ 時, x^2+y^2 有最小值 $\frac{16}{5}$.

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 13)

1. 若二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 之部

分圖形如右，且圖形通過 $(1,0)$ ，則

- (1) $a + 2b > 0$ (2) $a - 2b + 4c < 0$
 (3) $2b^2 + ac < 0$ (4) $b > 0$ (5) $a > b$.



1. **解答** 124

解析 設 $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-t)(x-1) = ax^2 - a(t+1)x + at$

$$\therefore b = -a(t+1), c = at, a < 0, -\frac{1}{2} < t < 0$$

$$(1) a + 2b = a - 2a(t+1) = a - 2at - 2a = -a(2t+1) > 0 .$$

$$(2) a - 2b + 4c = a + 2a(t+1) + 4at = 3a(2t+1) < 0 .$$

$$(3) 2b^2 + ac = 2a^2(t+1)^2 + a^2t = a^2(2t^2 + 4t + 2 + t) = a^2(2t^2 + 5t + 2) \\ = a^2(t+2)(2t+1) > 0 .$$

$$(4) b = -a(t+1) > 0 .$$

$$(5) \because a < 0, b > 0, \therefore a < b .$$

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 14)

1. 一農夫想用 102 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如圖所示。此農夫所能圍成的最大面積為 _____ 平方公尺。



2 公尺



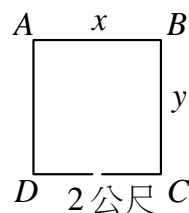
解答 676

解析 如圖，設 $\overline{AB} = x$ 公尺， $\overline{BC} = y$ 公尺

$$\text{則 } x + (x - 2) + 2y = 102 \Rightarrow x + y = 52$$

$$\text{面積 } xy = x(52 - x) = -x^2 + 52x = -(x - 26)^2 + 676$$

即 $x = 26$ 時，面積的最大值為 676 平方公尺。



4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 15)

1. 某印刷工人印刷文件，於 10,000 張之內，其底價為每千張 30 元，若印刷量超出 10,000 張時，則其底價每超過千張即降低 5%，問

(1)印刷_____張，

(2)可使此印刷工人之收入最大為_____。



解答

(1)15 千;(2)337.5 元

解析

設印刷 x 千張，則 $y = x[30 - (x - 10)(30 \times 0.05)]$

$$= -1.5x^2 + 45x = -1.5(x - 15)^2 + 337.5$$

\therefore 15 千張，最大收入為 337.5 元。

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 16)

1. 設 $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$ ，求 $y = f(x)$ 在 $x = -2$ 附近會近似直線為何？



解答

$$y = -3x - 2$$

解析

$m = 4x + 5$ 將 $x = -2$ 代入求得 $m = -3$

當 $x = -2$ 代入 $f(-2) = y = 4$

由點斜式得知 $-3 = \frac{y - 4}{x + 2}$

求得 $y = -3x - 2$

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 17)

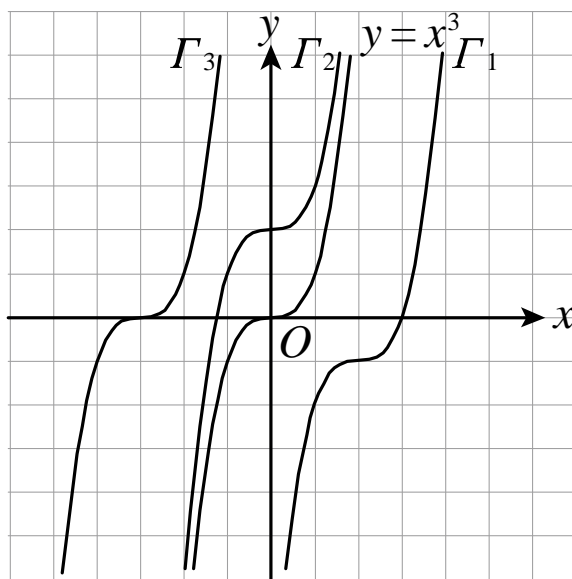
1. (連連看) 將下列函數連到所對應的函數圖形之代號

上:

$$y = x^3 + 2 \quad \cdot \quad \Gamma_1$$

$$y = (x + 3)^3 \quad \cdot \quad \Gamma_2$$

$$y = (x - 3)^3 - 1 \quad \cdot \quad \Gamma_3$$



解答

見解析

解析

利用平移的概念, 得知 Γ_1 為 $y = (x - 3)^3 - 1$, Γ_2 為 $y = x^3 + 2$, Γ_3 為 $y = (x + 3)^3$.

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 18)

1. 若 (α, β) 在 $y = x^3$ 上, 則下列哪些點也在 $y = x^3$ 上一定正確?

(1) $(-\alpha, -\beta)$ (2) (β, α) (3) $(-\beta, -\alpha)$ (4) (α, α^3) (5) (β, β^3) .



解答

145

解析

代入驗證即可. (α, β) 在 $y = x^3$ 上 $\Rightarrow \beta = \alpha^3$

(1) \circ : $-\beta = (-\alpha)^3$. (2) \times : $\alpha \neq \beta^3$. (3) \times : $-\alpha \neq (-\beta)^3$.

(4)(5) 代入一定正確.

4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 19)

1. 若 (α, β) 在 $y = x^4$ 上, 則下列哪些點也在 $y = x^4$ 上一定正確?

- (1) $(-\alpha, -\beta)$ (2) $(\alpha, -\beta)$ (3) $(-\alpha, \beta)$
 (4) (α^2, β^2) (5) (β, β^4) .



解答 345

解析 代入驗證即可. (α, β) 在 $y = x^4$ 上 $\Rightarrow \beta = \alpha^4$

- (1) \times : $-\beta \neq (-\alpha)^4$. (2) \times : $-\beta \neq \alpha^4$. (3) \circ : $\beta = (-\alpha)^4$.
 (4) \circ : $\beta^2 = (\alpha^2)^4$. (5)代入一定正確.

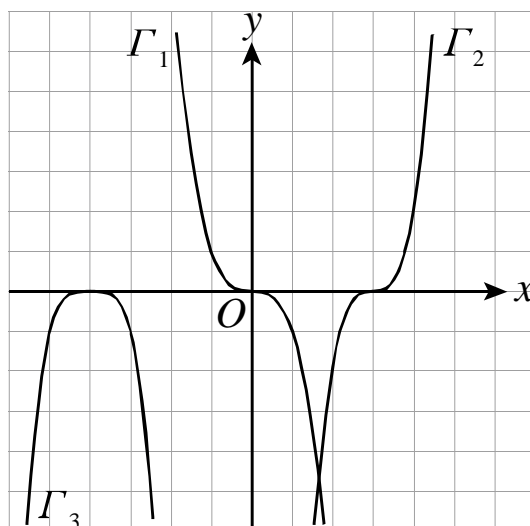
4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 20)

1. 如圖為下列三個函數的圖形: $y = a_1x^3$, $y = a_2(x-3)^3$,

$y = a_3(x-h)^4$.

選出正確的選項:

- (1) Γ_1 為 $y = a_1x^3$ 的圖形
 (2) $a_1 > 0$
 (3) $a_2 > 0$
 (4) $a_3 > 0$
 (5) $h > 0$



解答 13

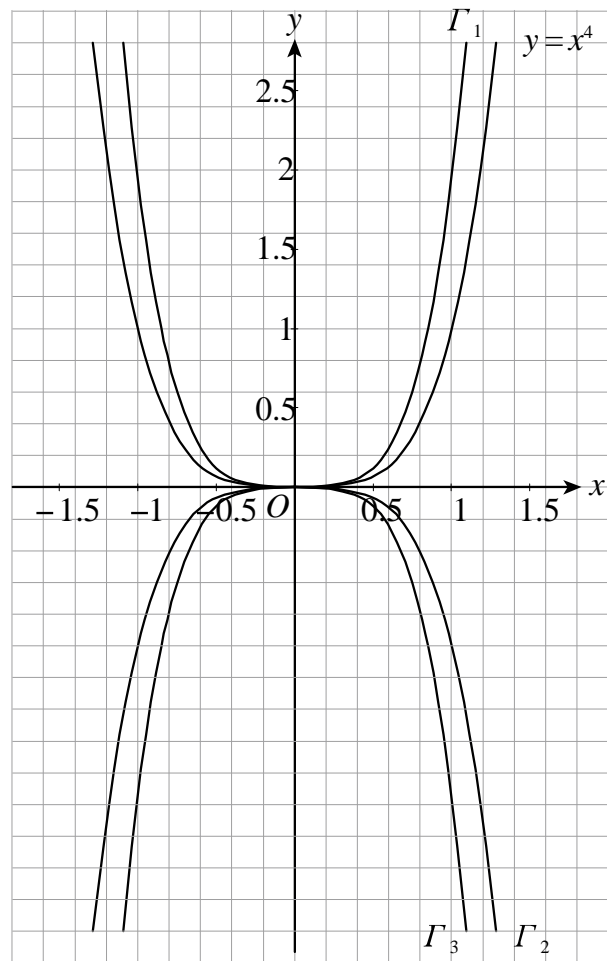
4-2 簡單多項式函數及其圖形(常考題型 21)

1. (連連看) 將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上:

$$y = -x^4 \cdot \Gamma_1$$

$$y = 2x^4 \cdot \Gamma_2$$

$$y = -2x^4 \cdot \Gamma_3$$



解答

見解析

解析

因為 $y = x^4$, $y = -x^4$, $y = 2x^4$, $y = -2x^4$ 的圖形分別通過 $(1,1)$, $(1,-1)$, $(1,2)$, $(1,-2)$, 所以先在坐標平面上作鉛直線 $x = 1$, 再由此鉛直線與四個函數圖形之交點的高低順序, 可判斷出 Γ_1 為 $y = 2x^4$, Γ_2 為 $y = -x^4$, Γ_3 為 $y = -2x^4$.