4-1 多項式的運算與應用(常考題型 1)

1. 下列哪些是 x 的多項式? (1)$2(x+2)(x-3)$　(2)$x^2+\dfrac{x}{\sqrt{2}}+1$　(3)$x^2+\dfrac{2}{x}-3$ (4)5　(5)$x+\sqrt{x}+1$ 【羅東高中月考】	

解答　124

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 2)

1. 設多項式 $P(x)$,滿足 $P(0)=2$,$P(x+1)=P(x)+3x^2+3x+1$,其中 $x=0$,1,2,3,…均成立,求 $P(x)$=?	

解答　x^3+2

解析　由 $P(x+1)-P(x)=3x^2+3x+1$,知 $P(x)$是三次方程式,　又 $P(0)=2$,設 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+2$, $a\neq 0$, $P(x+1)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+2$,$P(x+1)-P(x)=3ax^2+(3a+2b)x+(a+b+c)=3x^2+3x+1$ $\therefore 3a=3$,$3a+2b=3$,$a+b+c=1$,得 $a=1$,$b=0$,$c=0$,故 $P(x)=x^3+2$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 3)

1. 設多項式 $f(x) = (x^2 - x + 1)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_8x^8$，求
   (1)常數項． (2)各項係數總和．
   (3)偶次項係數總和． (4)奇次項係數總和．

解答 (1)1;(2)1;(3)41;(4) − 40

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 4)

1. 求$(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 10x^9 + 11x^{10})(1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8 - 11x^{10})$乘開後，$x^9$ 的係數．

解答 6

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 5)

1. 設多項式 $f(x)=x^4-8x^3+25x^2-30x+8=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$
則 $a+b+c+d+e$ 之值 $=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　8

解析　$x=3$ 代入得
$a+b+c+d+e=3^4-8\times3^3+25\times3^2-30\times3+8=8$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 6)

1. 已知兩多項式 $f(x)=2x^3-5x^2+6x+3$ 與 $g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$ 相等，求實數 a，b，c，d 的值．

解答　$a=2$，$b=7$，$c=5$，$d=6$

解析　因為 $f(x)$與 $g(x)$相等，所以 $\begin{cases}f(1)=g(1)\\f(2)=g(2)\\f(3)=g(3)\\f(0)=g(0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6=d\\11=c+d\\30=2b+2c+d\\3=-6a+2b-c+d\end{cases}$.

解得 $a=2$，$b=7$，$c=5$，$d=6$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 7)

1. 已知多項式 x^4+ax^2+2x+b 能被 x^2+2x-2 整除，
   則數對$(a,b)=$______________ .

解答　$(-7,2)$

解析

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-2- \quad 1 \\
\hline
1+2-2 & 1+0+ \quad a+2+ \quad b \\
 & 1+2- \quad 2 \\
\cline{2-2}
 & -2+(a+2)+2 \\
 & -2- \quad 4+4 \\
\cline{2-2}
 & (a+6)-2+ \quad b \\
 & - \quad 1-2+ \quad 2 \\
\cline{2-2}
 & (a+7)+0+(b-2)
\end{array}
$$

∵整除時，餘式為 0，
∴$a+7=0$，$b-2=0$，
∴$a=-7$，$b=2$，
數對$(a,b)=(-7,2)$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 8)

1. 設 $f(x)$與 $g(x)$都是五次多項式，而 $h(x)$是四次多項式．選出正確的選項：
   (1)$f(x)+g(x)$的次數超過五次
   (2)$f(x)-g(x)$的次數小於五次
   (3)$f(x)\div h(x)$的餘式為三次多項式
   (4)若 $f(x)\div(2x+1)$的餘式為 8，則 $f(x)\div(x+\frac{1}{2})$的餘式為 4
   (5)若 $f(x)\div(3x-1)$的商式為 $q(x)$，則 $f(x)\div(6x-2)$的商式為$\frac{q(x)}{2}$.

解答　5

解析　(1)$f(x)+g(x)$的次數必不超過五次．(2)$f(x)-g(x)$可能是五次多項式．(3)由除法定理知：若餘式為 $r(x)$，則 $0\le \deg r(x)<4$ 或 $r(x)=0$，由此餘式不一定是三次多項式．(4)設 $f(x)=(2x+1)q_1(x)+8$，則 $f(x)=(x+\frac{1}{2})\cdot 2q_1(x)+8$，所以餘式為 8．(5)設 $f(x)=(3x-1)q(x)+r$，則 $f(x)=(6x-2)\cdot\frac{1}{2}q(x)+r$，所以商式為$\frac{1}{2}q(x)$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 9)

1. 求$(4x^4+5x^2+2x+3)\div(2x-1)$的商式及餘式．	

解答　商式為 $2x^3+x^2+3x+\dfrac{5}{2}$，餘式為$\dfrac{11}{2}$

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 10)

1. 設 $f(x)=8x^3-12x^2+8x-5=a(2x-3)^3+b(2x-3)^2+c(2x-3)+d$． (1)求 a，b，c，d 的值． (2)求 $f(1.501)$的值到小數點以下第三位（第四位四捨五入）． (3)求 $f(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2})$ 的值．	

解答　(1)$a=1$，$b=6$，$c=13$，$d=7$;(2)7.026;(3)$55+42\sqrt{2}$

解析　(1)利用綜合除法，可將 $f(x)$改寫成

$$f(x)=8(x-\frac{3}{2})^3+24(x-\frac{3}{2})^2+26(x-\frac{3}{2})+7,$$

$=(2x-3)^3+6(2x-3)^2+13(2x-3)+7$ 因此, $a=1$, $b=6$, $c=13$, $d=7$.

(2)將 1.501 代入，得

$f(1.501)=1(2\cdot1.501-3)^3+6(2\cdot1.501-3)^2+13(2\cdot1.501-3)+7\approx 13\cdot0.002+7=7.026$.

(3)因為 $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$，且

$$f(x)=8(x-\frac{3}{2})^3+24(x-\frac{3}{2})^2+26(x-\frac{3}{2})+7$$

所以 $f(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2})=8(\sqrt{2})^3+24(\sqrt{2})^2+26(\sqrt{2})+7=55+42\sqrt{2}$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 11)

1. 設 $f(x-2)=5x^3+2x-47$，則 $f(x)$為____________ .	

解答　$5x^3+30x^2+62x-3$

解析　由綜合除法得

$f(x-2)=5x^3+2x-47=5(x-2)^3+30(x-2)^2+62(x-2)-3$，

令 $x-2=t$，得 $f(t)=5t^3+30t^2+62t-3$，

即 $f(x)=5x^3+30x^2+62x-3$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 12)

1. 求 $x^{2011}+2011$ 除以 $2011x+2011$ 的餘式 .	

解答　2010

解析　設 $x^{2011}+2011=(2011x+2011)\cdot Q(x)+r$

$x=-1$ 代入

$\Rightarrow (-1)^{2011}+2011=[2011\times(-1)+2011]\cdot Q(-1)+r$

$\Rightarrow r=(-1)^{2011}+2011=2010$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 13)

1. 已知 $f(x)=123x^4-234x^3-36x^2+48x-50$，
   則 $f(2)=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　-2

解析　如果直接將 $x=2$ 代入 $f(x)$求 $f(2)$的值，數目較大，不容易計算；但由餘式定理知道；「$f(2)$」可視為「$x-2$ 除 $f(x)$的餘式」．
現在利用綜合除法來計算餘式 $f(2)$：由

$$\begin{array}{rrrrr|l} 123 & -234 & -36 & +48 & -50 & 2 \\ & +246 & +24 & -24 & +48 & \\ \hline 123 & +12 & -12 & +24 & \boxed{-2} & \end{array}$$

故 $f(2)=-2$．

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 14)

1. 已知多項式 $f(x)$除以 $x+1$ 得餘式 5；除以 $x-2$ 得餘式 2，
   求 $f(x)$除以$(x+1)(x-2)$的餘式為＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$-x+4$

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 15)

1. 設多項式 $f(x)$除以 $x+1$，$x-3$，$x+4$ 之餘式分別為 4，32，-38，則 $f(x)$除以$(x+1)(x-3)(x+4)$之餘式為______________.

解答　$-x^2+9x+14$

解析　由題意知 $f(-1)=4$，$f(3)=32$，$f(-4)=-38$

令 $f(x)=(x+1)(x-3)(x+4)Q(x)+ax^2+bx+c$

$$\Rightarrow\begin{cases} f(-1)=a-b+c=4 \\ f(3)=9a+3b+c=32 \\ f(-4)=16a-4b+c=-38 \end{cases}$$ 解之得 $a=-1$，$b=9$，$c=14$

故 $f(x)$除以$(x+1)(x-3)(x+4)$之餘式為 $-x^2+9x+14$．

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 16)

1. 設多項式 $f(x)$除以$(x^2+x+1)^2$ 餘式為 x^3+x^2+4x+3，除以 $x+3$ 餘式為 1，求
   (1)$f(x)$除以 x^2+x+1 之餘式．
   (2)$f(x)$除以$(x^2+x+1)(x+3)$之餘式．

解答　(1)$3x+3$;(2)x^2+4x+4

解析　(1)$f(x)=(x^2+x+1)^2q_1(x)+(x^3+x^2+4x+3)$

$=(x^2+x+1)^2q_1(x)+[(x^2+x+1)\times x+3x+3]$

$=(x^2+x+1)[(x^2+x+1)q_1(x)+x]+3x+3$　$\therefore$所求餘式為 $3x+3$

(2)$f(x)=(x^2+x+1)(x+3)q(x)+a(x^2+x+1)+3x+3$

$\Rightarrow f(-3)=7a-9+3=1$　$\Rightarrow a=1$

所求餘式為$(x^2+x+1)+3x+3=x^2+4x+4$．

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 17)

1. 已知 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}$，求 $2x^4-3x^3-3x^2-2x+2$ 的值．

解答　$4+\sqrt{2}$

解析　設 $f(x)=2x^4-3x^3-3x^2-2x+2$ ．

因為 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，

所以 $x-1=\sqrt{2}\Rightarrow(x-1)^2=2\Rightarrow x^2-2x-1=0$，

計算 $f(x)$除以 x^2-2x-1 得商式為 $2x^2+x+1$，餘式為 $x+3$，

得 $f(x)=(x^2-2x-1)(2x^2+x+1)+(x+3)$，

將 x 以$\sqrt{2}+1$代入，得 $f(\sqrt{2}+1)=0+(\sqrt{2}+1+3)=4+\sqrt{2}$ ．

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 18)

1. 設 $f(x)$為三次多項式，且 $f(1996)=-3$，$f(1997)=4$，$f(1998)=5$，$f(1999)=6$，求 $f(2000)=$ ＿＿＿＿＿＿ ．

解答　13

解析　

$$f(2000)=(-3)\times\frac{(2000-1997)(2000-1998)(2000-1999)}{(1996-1997)(1996-1998)(1996-1999)}$$
$$+4\times\frac{(2000-1996)(2000-1998)(2000-1999)}{(1997-1996)(1997-1998)(1997-1999)}$$
$$+5\times\frac{(2000-1996)(2000-1997)(2000-1999)}{(1998-1996)(1998-1997)(1998-1999)}$$
$$+6\times\frac{(2000-1996)(2000-1997)(2000-1998)}{(1999-1996)(1999-1997)(1999-1998)}$$
$$=3+16-30+24=13\ .$$

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 19)

1. (1)多項式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 滿足 $f(0)=-2, f(3)=4, f(-1)=4$，求 $a+b+c=$ ______________ . (2)已知三次函數 $f(x)$ 的函數圖形通過坐標平面上的五點 $A(122,t)$，$B(123,5)$，$C(124,6)$，$D(125,25)$，$E(126,44)$，則 $t=$ ______________ .	

解答　(1) -4;(2)40

解析　(1)依牛頓插值法，設 $f(x)=px(x-3)+qx+r$

代入得 $\begin{cases} f(0)=r=-2 \\ f(3)=q\cdot 3+r=4 \\ f(-1)=p(-1)(-1-3)+q\cdot(-1)+r=4 \end{cases}$

解得 $p=2$，$q=2$，$r=-2$　故 $f(x)=2x(x-3)+2x-2$

所求 $a+b+c=f(1)=2\cdot 1\cdot(1-3)+2\cdot 1-2=-4$.

(2)依題意知 $f(123)=5$，$f(124)=6$，$f(125)=25$，$f(126)=44$，欲求 $t=f(122)$

依牛頓插值法，設 $f(x)=a(x-123)(x-124)(x-125)$
$+b(x-123)(x-124)+c(x-123)+d$

代入得

$$\begin{cases} f(123)=d=5 \\ f(124)=c\cdot(124-123)+d=6 \\ f(125)=b(125-123)(125-124)+c(125-123)+d=25 \\ f(126)=a(126-123)(126-124)(126-125)+b(126-123)(126-124) \\ \qquad\qquad +c(126-123)+d=44 \end{cases}$$

解得 $a=-3$，$b=9$，$c=1$，$d=5$

故 $t=f(122)=(-3)(122-123)(122-124)(122-125)+9(122-123)(122-124)+1\cdot(122-123)+5=40$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 20)

1. 設 $x^4+3x^3+lx^2+mx+n$ 能被$(x^2-1)(x+2)$整除，求 l，m，n 之值．

解答　$l=1$，$m=-3$，$n=-2$

解析　令 $f(x)=x^4+3x^3+lx^2+mx+n$

$f(1)=4+l+m+n=0\ldots$①

$f(-1)=-2+l-m+n=0\ldots$②

$f(-2)=-8+4l-2m+n=0\ldots$③

解①②③得 $l=1$，$m=-3$，$n=-2$．

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 21)

1. 設 $\deg f(x)=3$，且 $f(2)=f(-3)=f(4)=-5$，$f(1)=19$，則 $f(6)=$ ______________．

解答　139

解析　設 $f(x)=a(x-2)(x+3)(x-4)-5$，

由 $f(1)=19\Rightarrow 12a-5=19$ 得 $a=2\Rightarrow f(x)=2(x-2)(x+3)(x-4)-5$

$\Rightarrow f(6)=2\times 4\times 9\times 2-5=139$．

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 22)

1. 設 $f(x)$為四次多項式，x^4 項之係數為 1，若$(x+1)^2$ 為 $f(x)$之因式，且 $f(x)$除以$(x-1)^2$ 之餘式為 $16(x-1)$，試求 $f(x)$．

解答　$x^4+4x^3+2x^2-4x-3$

解析　設 $f(x)=(x+1)^2(x^2+ax+b)=(x-1)^2q(x)+16(x-1)$…①

$f(1)=4(1+a+b)=0$，$b=-1-a$

$\Rightarrow f(x)=(x+1)^2(x^2+ax-1-a)=(x+1)^2(x-1)(x+1+a)$…②

①②兩式各約去 $x-1$ 得$(x-1)q(x)+16=(x+1)^2(x+1+a)$

令 $x=1$ 代入上式得 $16=4\times(2+a)$，$\therefore a=2$，$b=-1-a=-3$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(x^2+2x-3)=x^4+4x^3+2x^2-4x-3$．

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 23)

4. $f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，若已知 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=2$，則 $a-b+c-d=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　-2

解析　$\because f(x)-2$ 至多為三次式

又有 4 個相異 x 值 1、2、3、4 滿足 $f(x)-2=0$

$\therefore$表示 $f(x)=2$

$\therefore f(0)=-a+b-c+d=2$，即 $a-b+c-d=-2$．

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 24)

1.將多項式 $3x^5+6x^4-2x^3-4x^2-x-2$ 分解，其整係數一次因式的乘積為______________ .

【97 松山高中期中考】

解答　$(x+1)(x-1)(x+2)$

解析　$3x^5+6x^4-2x^3-4x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)(3x^2+1)$

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 3 & +6 & -2 & -4 & -1 & -2 & 1 \\ & 3 & +9 & +7 & +3 & +2 & \\ \hline 3 & +9 & +7 & +3 & +2 & \boxed{0} & \end{array} \quad \begin{array}{rrrrr|r} 3 & +9 & +7 & +3 & +2 & -1 \\ & -3 & -6 & -1 & -2 & \\ \hline 3 & +6 & +1 & +2 & \boxed{0} & \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 3 & +6 & +1 & +2 & -2 \\ & -6 & +0 & -2 & \\ \hline 3 & +0 & +1 & \boxed{0} & \end{array}$$

故一次因式乘積 $=(x+1)(x-1)(x+2)$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 25)

1. 設 $f(x)=x^4-3ax^2+bx+4$ 有 $x+1$ 及 $x-2$ 的因式，求數對 $(a\,,b)=$______________ .

解答　$(\frac{5}{3},0)$

解析　$f(x)=x^4-3ax^2+bx+4$ 由因式定理知

$f(-1)=1-3a-b+4=0$，$f(2)=16-12a+2b+4=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b=5\cdots① \\ 12a-2b=20\cdots② \end{cases}$ 解①②得 $a=\frac{5}{3}$， $b=0$　$\therefore (a\,,b)=(\frac{5}{3},0)$.

4-1 多項式的運算與應用(常考題型 26)

1. 若 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(x-2)^4-(x-2)^3+2(x-2)^2+5(x-2)+7$，求 a,b,c,d,e 之值．

解答　$a=1$，$b=-9$，$c=32$，$d=-47$，$e=29$

解析　令原式中 $y=x-2$，則 $x=y+2$，且原式代換為

$a(y+2)^4+b(y+2)^3+c(y+2)^2+d(y+2)+e=y^4-y^3+2y^2+5y+7$，

逐步以綜合除法計算得

$1-1+2\ \ +5\ \ +7 \mid -2$

$\ \ -2+6\ \ -16+22$

$1-3+8\ \ -11 \mid +29=e$

$\ \ -2+10-36$

$1-5+18 \mid -47=d$

$\ \ -2+14$

$1-7 \mid \ \ 32=c$

$\ \ -2$

$1,-9\cdots b=-9,\ a=1$．