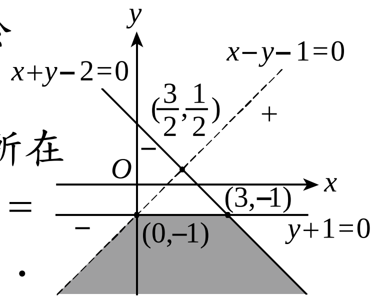
2-2 線性規劃(常考題型 1)

1. 圖示二元一次聯立不等式$\begin{cases} x+y\le 2 \\ x-y>1 \\ y\le -1 \end{cases}$的解．	

解答　見解析

解析　畫出直線 $x+y=2$，$x-y=1$，$y=-1$，由於不過(0,0)，利用(0,0)去判斷滿足條件的半平面，$\because 1\cdot 0+1\cdot 0=0<2$，所以 $x+y\le 2$ 的解為(0,0)所在的半平面，以及直線 $x+y-2=0$．又 $1\cdot 0-1\cdot 0=0<1$，所以 $x-y>1$ 的解為非(0,0)所在的半平面．而 $0>-1$，所以 $y\le -1$ 的解為非(0,0)所在的半平面及直線 $y=-1$．接著取圖形重疊的部分．如圖．

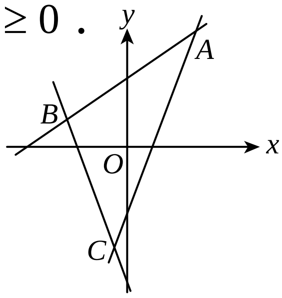


2-2 線性規劃(常考題型 2)

1. 如圖所示，△ABC 是由三直線：L1：$x-2y+4=0$，L2：$2x-y-2=0$，L3：$2x+y+4=0$ 所圍成，則此三角形區域(含邊界)可用下列哪一不等式表示：

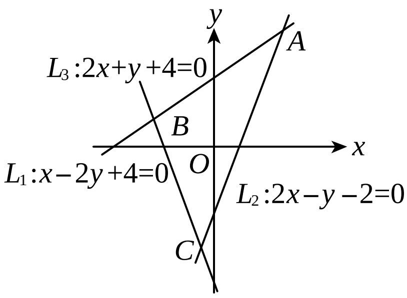
(1)$x-2y+4\geq 0$，$2x-y-2\geq 0$，$2x+y+4\leq 0$
(2)$x-2y+4\geq 0$，$2x-y-2\leq 0$，$2x+y+4\geq 0$
(3)$x-2y+4\leq 0$，$2x-y-2\geq 0$，$2x+y+4\geq 0$
(4)$x-2y+4\geq 0$，$2x-y-2\leq 0$，$2x+y+4\leq 0$
(5)$x-2y+4\leq 0$，$2x-y-2\leq 0$，$2x+y+4\geq 0$．

【松山高中月考】



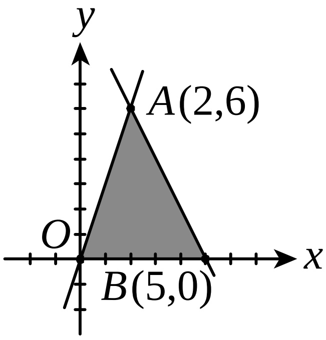
解答　2

解析　由圖可知$\begin{cases} x-2y+4\geq 0 \\ 2x-y-2\leq 0 \\ 2x+y+4\geq 0 \end{cases}$，故選(2)．



2-2 線性規劃(常考題型 3)

1. 已知下圖為二元一次聯立不等式$\begin{cases} x+ay\geq 0 \\ bx+cy\leq 5 \\ y\geq 0 \end{cases}$的解區域，求 a,b,c．



解答　$a=-\frac{1}{3}$，$b=1$，$c=\frac{1}{2}$

解析　先求出三條直線 AB，OA，OB 的方程式分別為：

直線 AB 的方程式為 $2x+y=10$，直線 OA 的方程式為 $3x-y=0$，直線 OB 的方程式為 $y=0$．由圖可知圖形中的區域為二元一次聯立不等式$\begin{cases} 3x-y\geq 0 \\ 2x+y\leq 10 \\ y\geq 0 \end{cases}$的解區域，比較$\begin{cases} x+ay\geq 0 \\ bx+cy\leq 5 \\ y\geq 0 \end{cases}$與$\begin{cases} 3x-y\geq 0 \\ 2x+y\leq 10 \\ y\geq 0 \end{cases}$，因為$\begin{cases} x+(-\frac{1}{3})y\geq 0 \\ x+\frac{1}{2}y\leq 5 \\ y\geq 0 \end{cases}$與$\begin{cases} 3x-y\geq 0 \\ 2x+y\leq 10 \\ y\geq 0 \end{cases}$有相同的解區域，故可得 $a=-\frac{1}{3}$，$b=1$，$c=\frac{1}{2}$．

2-2 線性規劃(常考題型 4)

1. 若$(1,3)$，$(2,-1)$兩點在直線 $x-y+a=0$ 的同側，求 a 的範圍．

解答　$a>2$ 或 $a<-3$

解析　兩點在直線 $x-y+a=0$ 的同側

$\Rightarrow (1-3+a)[2-(-1)+a]>0 \Rightarrow (a-2)(a+3)>0$

$\Rightarrow a>2$ 或 $a<-3$．

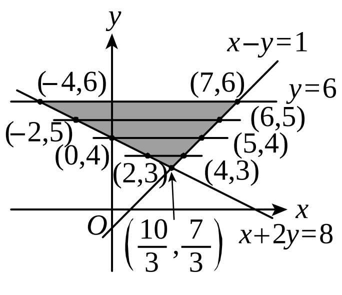
2-2 線性規劃(常考題型 5)

1. 設 $7-2y\le x-1\le y\le 6$ 的圖形為 S，則 S 有__________個格子點．（坐標皆為整數的點稱為格子點）

【台中女中月考】

解答　30

解析　$7-2y\le x-1\le y\le 6 \Rightarrow \begin{cases} 7-2y\le x-1 \\ x-1\le y \\ y\le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y\ge 8 \\ x-y\le 1 \\ y\le 6 \end{cases}$　所成區域如圖，



當 $y=6$ 時，$-4\le x\le 7$，有 $7-(-4)+1=12$ 個格子點，

當 $y=5$ 時，$-2\le x\le 6$，有 $6-(-2)+1=9$ 個格子點，

當 $y=4$ 時，$0\le x\le 5$，有 $5-0+1=6$ 個格子點，

當 $y=3$ 時，$2\le x\le 4$，有 $4-2+1=3$ 個格子點，

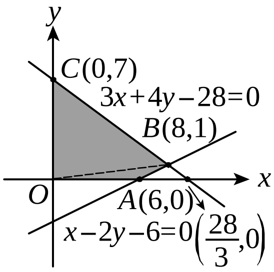
故共有 $3+6+9+12=30$ 個格子點．

2-2 線性規劃(常考題型 6)

1. 描繪 $x\ge 0$，$y\ge 0$，$x-2y-6\le 0$，$3x+4y-28\le 0$ 之圖形，此圖形所圍區域之面積為____________．

解答　31

解析　如圖，



面積= $\triangle OAB$ 面積+ $\triangle OBC$ 面積 $=\frac{1}{2}\times 6\times 1+\frac{1}{2}\times 7\times 8=31$．

2-2 線性規劃(常考題型 7)

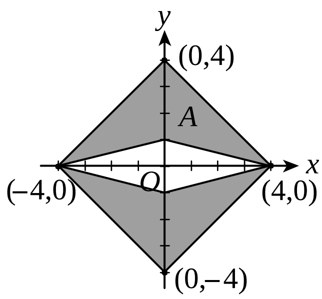
1. (1)在坐標平面上作出 $\begin{cases}|x|+|y|\le 4\\ |x|+4|y|\ge 4\end{cases}$ 的圖形．(2)並求其面積．

解答　(1)見解析;(2)24

解析　(1)兩圖形均與 x 軸,y 軸成對稱,先作 $x\ge 0,y\ge 0$ 之圖形 $\begin{cases}x+y\le 4\\ x+4y\ge 4\end{cases}$ 為圖形中 A 區域,

故 $\begin{cases}|x|+|y|\le 4\\ |x|+4|y|\ge 4\end{cases}$ 的圖形為圖中整個鋪色區域．

(2)面積為 $\frac{1}{2}\times 8\times 8-\frac{1}{2}\times 8\times 2=24$．



2-2 線性規劃(常考題型 8)

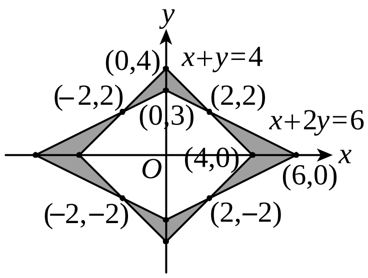
1. 試作不等式$(|x|+|y|-4)(|x|+2|y|-6)\le 0$的圖形，並求其面積．

【台中女中月考】

解答　圖見解析，面積為 12

解析　$(|x|+|y|-4)(|x|+2|y|-6)\le 0 \Rightarrow \begin{cases}|x|+|y|-4\ge 0\\|x|+2|y|-6\le 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|x|+|y|-4\le 0\\|x|+2|y|-6\ge 0\end{cases}$

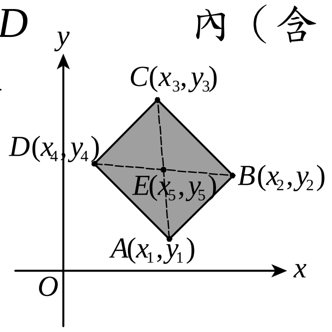
考慮$|x|+|y|-4=0\Rightarrow|x|+|y|=4$，將 x 用$(-x)$代入，其值不變，故圖形對稱 y 軸；同理，y 用$(-y)$代入，其值不變，故圖形對稱 x 軸，同理，$|x|+2|y|-6=0$ 也有相同性質，故令 $x\ge 0$，$y\ge 0$，$x+y=4$，$x+2y=6$，再配合對稱性，可畫出區域圖形，



面積$=4\times(\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times2)=4\times3=12$．

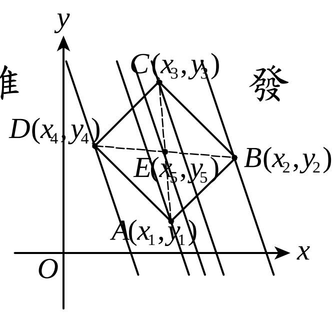
2-2 線性規劃(常考題型 9)

1. 各點坐標如圖所示，讓點(x,y)為矩形 $ABCD$ 內（含邊界）一點，且已知$\overline{AB}$的斜率為 1，試求 $3x+y$ 的最大值為何？　(1)$3x_1+y_1$　(2)$3x_2+y_2$　(3)$3x_3+y_3$　(4)$3x_4+y_4$　(5)$3x_5+y_5$．



解答　2

解析　如圖所示，將斜率為 − 3 的平行線畫上，不難發現最大值（可觀察 x 截距）發生在 B 點．

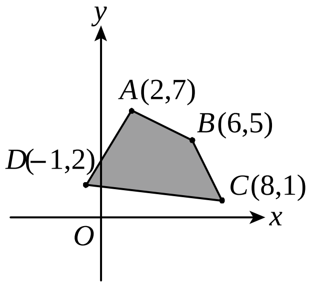


故最大值為 $3x_2+y_2$．

故選(2)．

2-2 線性規劃(常考題型 10)

1. 坐標平面上，設 $A(2, 7)$，$B(6, 5)$，$C(8, 1)$，$D(-1, 2)$，若點 $P(x, y)$位於四邊形 $ABCD$ 區域，求下列各問題：
(1)$x+3y$ 的最大值________．(2)$x+3y$ 的最小值________．
(3)$x-2y$ 的最大值________．(4)$x-2y$ 的最小值________．
(5)$2y-3x$ 的最大值________．(6)$2y-3x$ 的最小值________．



解答　(1)23;(2)5;(3)6;(4) − 12;(5)8;(6) − 22

解析　(1)(2)

(x, y)	$(2, 7)$	$(6, 5)$	$(8, 1)$	$(-1, 2)$
$x+3y$	23	21	11	5
	↑ 最大值			↑ 最小值

(3)(4)

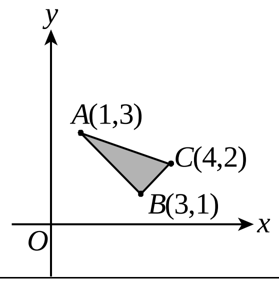
(x, y)	$(2, 7)$	$(6, 5)$	$(8, 1)$	$(-1, 2)$
$x-2y$	-12	-4	6	-5
	↑ 最小值		↑ 最大值	

(5)(6)

(x, y)	$(2, 7)$	$(6, 5)$	$(8, 1)$	$(-1, 2)$
$2y-3x$	8	-8	-22	7
	↑ 最大值		↑ 最小值	

2-2 線性規劃(常考題型 11)

1. 設點 $P(x,y)$是下圖三角形區域（含邊界）中的一點，求下列三式的最大值與最小值：(1)x^2+y^2 .　(2)$\frac{y}{x}$.



解答　(1)最大值 20，最小值 8;(2)最大值 3，最小值$\frac{1}{3}$

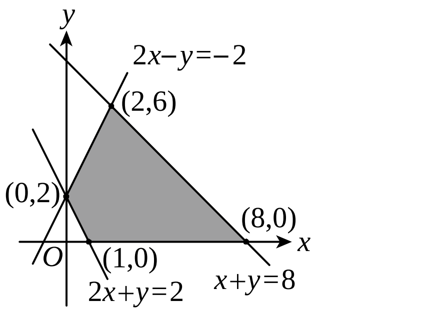
2-2 線性規劃(常考題型 12)

1. 兩實數 x，y 在$\begin{cases} x+y\le 8 \\ 2x-y\ge -2 \\ 2x+y\ge 2 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$條件下，若 $P=ax+y$ 在(2 , 6)有最大值，則在 P 之所有可能值中最小為____________ .

【台中女中月考】

解答　2

解析　將滿足$\begin{cases} x+y\le 8 \\ 2x-y\ge -2 \\ 2x+y\ge 2 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$的可行解區域畫出如圖，



(x,y)	(2,6)	(0,2)	(1,0)	(8,0)
P	$2a+6$	2	a	$8a$

依題意 $2a+6\ge 2 \Rightarrow a\ge -2$，$2a+6\ge a \Rightarrow a\ge -6$，$2a+6\ge 8a \Rightarrow a\le 1$，

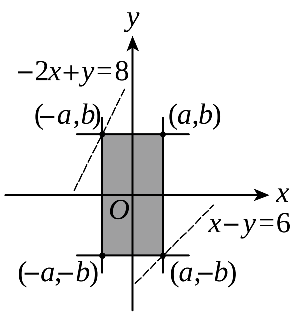
$\therefore -2\le a\le 1 \Rightarrow -4\le 2a\le 2 \Rightarrow 2\le 2a+6\le 8$，故可能值中最小為 2 .

2-2 線性規劃(常考題型 13)

1. 已知 $a>0$，$b>0$，若在二元一次聯立不等式$\begin{cases}-a\le x\le a\\-b\le y\le b\end{cases}$的區域解中，$x-y$ 與 $y-2x$ 分別可取得最大值 6 與 8，試問 a，b 之值．	

解答　$a=2$，$b=4$

解析　由圖可知，$x-y$ 最大值發生在$(a,-b)\Rightarrow a+b=6$．



$y-2x$ 的最大值發生在$(-a,b)$　$\Rightarrow$　$2a+b=8$

解聯立$\begin{cases}a+b=6\\2a+b=8\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}$．

2-2 線性規劃(常考題型 14)

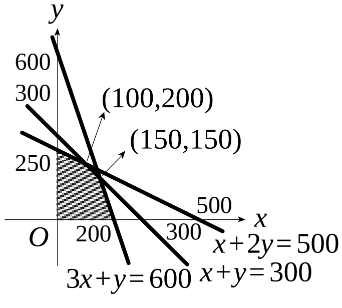
1. 設有一個玩具工廠生產 A、B 兩種玩具，其中 A 玩具每個可以獲利 200 元，B 玩具每個可以獲利 300 元，但在製作玩具的過程中要考慮到成本，包含：設計費用，材料費與工資，而 A，B 兩種玩具的每個成本分別如下表，若現在該工廠在各項費用上有預算上的限制：設計費不能超過 9000 元，材料費不能超過 4500 元，工資不能超過 5000 元。

	設計費（元／個）	材料費（元／個）	工資（元／個）
玩具 A	45	15	10
玩具 B	15	15	20

根據以上資料，設生產 A 玩具 x 個和 B 玩具 y 個，有最大獲利．求
(1)限制條件．
(2)畫出上述條件的可行解區域圖形．
(3)目標函數．
(4)當 x，y 分別為何值時，可得最大獲利值為多少?

解答 (1)$\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0 \\ 45x+15y\le 9000 \\ 15x+15y\le 4500 \\ 10x+20y\le 5000 \end{cases}$;(2)見解析;(3)$200x+300y$;(4)當 $x=100$，$y=200$，有最大獲利 80000 元

解析 (1)$\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0 \\ 45x+15y\le 9000 \\ 15x+15y\le 4500 \\ 10x+20y\le 5000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0, y\ge 0 \\ 3x+y\le 600 \\ x+y\le 300 \\ x+2y\le 500 \end{cases}$，其中 x，y 為非負整數．

(2)


(3)$200x+300y$．

(4)

(x,y)	$(0,250)$	$(100,200)$	$(150,150)$	$(200,0)$
$200x+300y$	75000	80000	75000	40000

↑
最大值

$\therefore$ 當$(x,y)=(100,200)$時，最大獲利為 80000 元．

2-2 線性規劃(常考題型 15)

1. 在一個牽涉到兩個未知量 x、y 的線性規劃作業中，有三個限制條件．坐標平面上符合這三個限制條件的區域是一個三角形區域．假設目標函數 $ax+by$（a，b 是常數）在此三角形的一個頂點(19,12)上取得最大值 31，而在另一個頂點(13,10)取得最小值 23．現因業務需要，加入第四個限制條件，結果符合所有限制條件的區域變成一個四邊形區域，頂點少了(19,12)，新增了(17,13)和(16,11)．在這四個限制條件下，請選出正確的選項：
(1)$ax+by$ 的最大值發生在(17,13)
(2)$ax+by$ 的最小值發生在(16,11)
(3)$ax+by$ 的最大值是 30
(4)$ax+by$ 的最小值是 27．

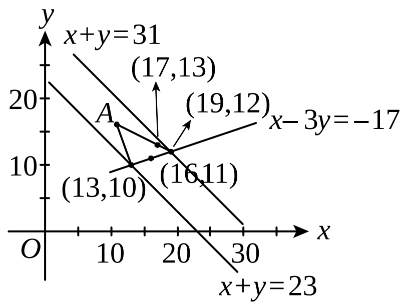
【指考甲】

解答　1、3

解析　因在(19,12)有最大值 31，且在(13,10)有最小值 23，

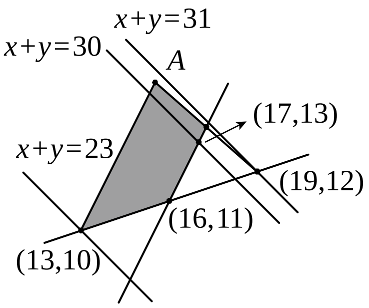
所以 $\begin{cases}19a+12b=31\\13a+10b=23\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=1$，即目標函數為 $x+y$．

令 $x+y=k$，因其幾何意義為斜率為 -1，且 x 截距為 k 的直線，所以當 x 截距愈大時，k 值愈大，又因在(19,12)有最大值 31，且在(13,10)有最小值 23，所以原三角形區域的另一頂點 A 必落在 $x+y=31$ 與 $x+y=23$ 二平行線之間．由圖知，少了(19,12)，新增(17,13)，(16,11)二點，

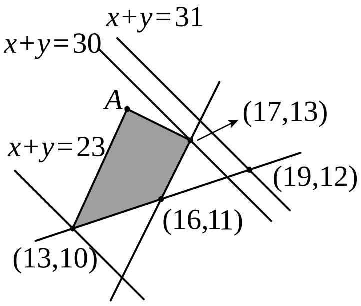


最小值仍發生在(13,10)，且最小值為 23；而最大值，我們依 A 點的位置討論如下：首先令$\{R_1=(x,y)\mid 30<x+y\le 31\}$，$R_2=\{(x,y)\mid 23\le x+y\le 30\}$，

①若 A 點落在 R_1 區，因題目要求新的可行解區是四邊形，且(17,13)為其頂點，這在此情形是辦不到的，所以 A 點不可能落在 R_1 區．



②若 A 點落在 R_2 區，則最大值發生在(17,13)，且最大值為 30．



故選(1)(3)．