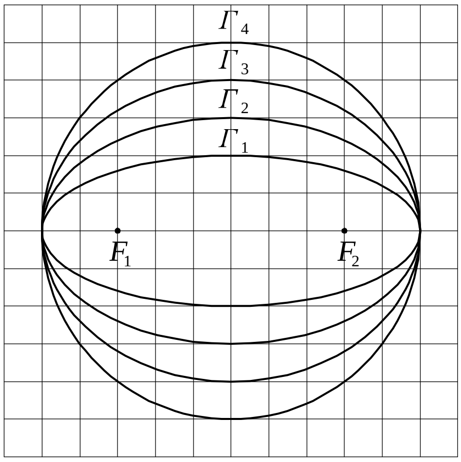
17-2 橢圓(常考題型 1)

圖中哪一個橢圓是以 F_1，F_2 為焦點的橢圓？
(1)Γ_1　(2)Γ_2　(3)Γ_3　(4)Γ_4．



解答　3

解析

由圖可知：橢圓長軸之半為 5 個單位長，兩焦點距離之半為 3 個單位長，
$\Rightarrow$ 短軸長之半為 $\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$ 個單位長，
故由圖可知：橢圓為 Γ_3，故選(3)．

17-2 橢圓(常考題型 2)

已知 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10$ 的圖形是一個橢圓，關於此橢圓，選出正確的選項：　(1)中心為(0,0)　(2)(4,0)為其焦點　(3)短軸長為 8　(4)長軸在 x 軸上．

解答　124

解析

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10$ 的意思是：動點 $P(x,y)$ 到兩定點 $F_1(4,0)$ 與 $F_2(-4,0)$ 的距離和為 10，
因此其圖形為以 F_1 與 F_2 為焦點的橢圓，且長軸長為 10．
因為中心為 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，所以中心為(0,0)，$2c=8$，$2a=10$，得 $a=5$，$c=4$，
並由 $a^2=b^2+c^2$ 可得 $b=3$，即 $2b=6$．
由上面的討論可得：
中心為(0,0)，焦點為(4,0)與$(-4,0)$，短軸長 6，長軸在 x 軸上．
故正確的選項為(1)(2)(4)．

17-2 橢圓(常考題型 3)

(1)求焦點為 $F_1(2,0)$與 $F_2(-2,0)$，長軸長為 8 的橢圓方程式． (2)求焦點為 $F_1(0,3)$與 $F_2(0,-3)$，短軸長為 6 的橢圓方程式．	

解答　(1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$;(2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$

解析

(1)因為橢圓的中心為 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，所以其中心為原點．

又因為 $F_1(2,0)$與 $F_2(-2,0)$都在 x 軸上，所以橢圓的長軸在 x 軸上，即橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的形式．

因為長軸長 $2a=8$，$2c=\overline{F_1F_2}=4$，所以 $a=4$，$c=2$，

代入 $a^2=b^2+c^2$，解得 $b=2\sqrt{3}$．

將 $a=4$，$b=2\sqrt{3}$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$．

(2)因為橢圓的中心為 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，所以其中心為原點．

又因為 $F_1(0,3)$與 $F_2(0,-3)$都在 y 軸上，所以橢圓的長軸在 y 軸上，即橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$的形式．

因為短軸長 $2b=6$，$2c=\overline{F_1F_2}=6$，所以 $b=3$，$c=3$，

代入 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=3\sqrt{2}$．

將 $a=3\sqrt{2}$，$b=3$ 代入 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，得橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$．

17-2 橢圓(常考題型 4)

若方程式 $\frac{x^2}{t-3}+\frac{y^2}{t-2}=1$的圖形為橢圓，則 t 的範圍為__________． 【中山女高月考】	

解答　$t>3$

解析　$\begin{cases} t-3>0 \\ t-2>0 \\ t-3\neq t-2 \end{cases} \Rightarrow t>3$．

17-2 橢圓(常考題型 5)

已知橢圓Γ的長軸長為 6，且與橢圓 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$ 有相同的焦點．求(1)Γ的焦點坐標．(2)Γ的方程式．

解答　(1)(0,2)與(0,－2);(2) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

解析

(1)由方程式 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$ 可知：橢圓的中心(0,0)，長軸在 y 軸上，

且 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{6-2}=2$，因此其焦點為(0,2)與(0,－2)．

因為Γ和橢圓 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$ 有相同的焦點，所以其焦點坐標為(0,2)與(0,－2)．

(2)因為Γ的中心為(0,0)，長軸在 y 軸上，

所以其方程式為 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 的形式．　由長軸長 $2a=6$，可得 $a=3$，又 $c=2$，代入 $a^2=b^2+c^2$，解得 $b=\sqrt{5}$．

將 $a=3$，$b=\sqrt{5}$ 代入 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，得Γ的方程式為 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$．

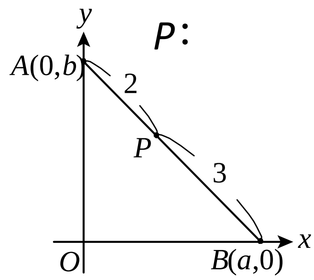
17-2 橢圓(常考題型 6)

點 A 在 y 軸上移動，點 B 在 x 軸上移動，$\overline{AB}$ 長度為 10，P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，則 P 點的軌跡方程式為__________．

【北一女中月考】

解答　$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$

解析　設 $A(0,b)$，$B(a,0)$，



$$\begin{cases} x=\dfrac{3\times 0+2\times a}{5}=\dfrac{2}{5}a \\ y=\dfrac{3\times b+2\times 0}{5}=\dfrac{3}{5}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2}x \\ b=\dfrac{5}{3}y \end{cases}$$

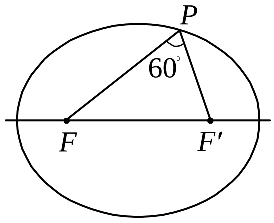
$$\overline{AB}=10 \Rightarrow \overline{AB}^2=100 \Rightarrow a^2+b^2=100 \Rightarrow (\frac{5}{2}x)^2+(\frac{5}{3}y)^2=100 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4,$$

故 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ 為所求．

17-2 橢圓(常考題型 7)

設$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{18}=1$上一點 P 與兩焦點 F，F'，夾角為 60 度， 求△PFF'的面積為______________ . 【成功高中月考】	

解答　$6\sqrt{3}$



解析　設$\overline{PF}=x$，$\overline{PF'}=10-x$，則

$c^2=a^2-b^2=7\Rightarrow c=\sqrt{7}\Rightarrow\overline{FF'}=2\sqrt{7}$，

△PFF'中 $\cos 60^\circ=\frac{x^2+(10-x)^2-(2\sqrt{7})^2}{2\times x\times(10-x)}\Rightarrow x^2-10x+24=0$

$\Rightarrow(x-6)(x-4)=0\Rightarrow x=6$ 或 $x=4$，

故△PFF'面積為$\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$.

17-2 橢圓(常考題型 8)

第一個繞行地球的人造衛星是蘇聯於西元 1957 年所發射的史潑尼克一號（Sputnik 1），其繞行軌道是橢圓，以地心為一焦點，這衛星離地面的最大高度是 800 公里，而離地面的最小高度是 200 公里，又地球的半徑是 6400 公里，試問這橢圓軌道的長軸長為______________公里 .（取整數） 【松山高中月考】	

解答　13800

解析　長軸長 $=800+6400\times 2+200=13800$ 公里 .