16-4 平面上線性變換(常考題型 1)

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{bmatrix}$．

(1)求點 $P(3,5)$經過 A 作線性變換後所對應之點 P'的坐標．

(2)求一點 Q,使得它經過 A 作線性變換後的對應點為 $Q'(4,-6)$.

解答　(1)(1,3);(2)(3,2)

解析　(1)因為 $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$，所以點 $P(3,5)$經過 A 作線性變換後的對應點 P'的坐標為(1,3)．

(2)設 Q 的坐標為(x,y)．因為 $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -6\end{bmatrix}$，

所以 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4\\ -6\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$．

故 Q 的坐標為(3,2)．

16-4 平面上線性變換(常考題型 2)

坐標平面上，已知$\triangle OAB$ 的三頂點分別為 $O(0,0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，若$\triangle OAB$ 經線性變換 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$後成$\triangle O'A'B'$．

試證：$\triangle O'A'B'$的面積$=\left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|\cdot\triangle OAB$ 的面積．

解答　見解析

解析

經線性變換 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，所以 $O'(0,0)$，$A'=(ax_1+by_1,cx_1+dy_1)$，$B'=(ax_2+by_2,cx_2+dy_2)$．

而 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)\Rightarrow\triangle OAB$ 的面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right|$，

$\overrightarrow{O'A'}=(ax_1+by_1,cx_1+dy_1)$，$\overrightarrow{O'B'}=(ax_2+by_2,cx_2+dy_2)$，

$\Rightarrow\triangle O'A'B'$的面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}ax_1+by_1 & cx_1+dy_1\\ ax_2+by_2 & cx_2+dy_2\end{vmatrix}\right|$

$=\frac{1}{2}\left|(ax_1+by_1)(cx_2+dy_2)-(ax_2+by_2)(cx_1+dy_1)\right|$

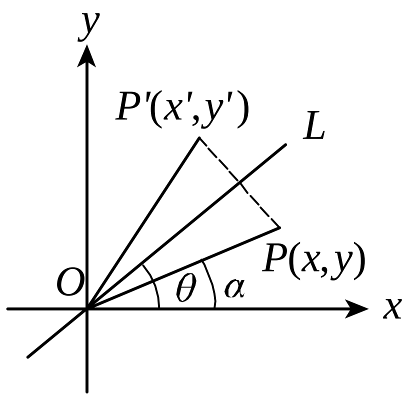
$=\frac{1}{2}\left|adx_1y_2+bcx_2y_1-bcx_1y_2-adx_2y_1\right|$

$=\frac{1}{2}\left|ad(x_1y_2-x_2y_1)+bc(x_2y_1-x_1y_2)\right|=\frac{1}{2}\left|(ad-bc)(x_1y_2-x_2y_1)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|\left(\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right|\right)=\left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|\cdot\triangle OAB$ 的面積．

16-4 平面上線性變換(常考題型 3)

如圖，L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線，若點 $P(x,y)$對直線 L 鏡射得點 $P'(x',y')$．試證：
$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$．



解答　見解析

解析　如圖，若點 P 與原點的連線 $\overline{OP}$ 與 x 軸正向夾角為 α，且 $\overline{OP}=r$ （$r>0$） $\Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$．

因此，點 $P(x,y)$對直線 L 鏡射得點 $P'(x',y')$，則 $\overline{OP'}=r$，

且 $\overline{OP'}$ 與 x 軸正向夾角為 $\theta+(\theta-\alpha)=2\theta-\alpha$，

$\Rightarrow \begin{cases} x' = r\cos(2\theta-\alpha) \\ y' = r\sin(2\theta-\alpha) \end{cases}$，利用和角公式展開可得，

$\Rightarrow \begin{cases} x' = r(\cos 2\theta\cos\alpha + \sin 2\theta\sin\alpha) = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ y' = r(\sin 2\theta\cos\alpha - \cos 2\theta\sin\alpha) = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{cases}$，

用矩陣表示為 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$．

16-4 平面上線性變換(常考題型 4)

已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$，求 A^6．

解答　$\begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix}$

解析　將矩陣 A 改寫為

$$A = 2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}.$$

因此，$A^6 = 2^6\begin{bmatrix} \cos 360^\circ & -\sin 360^\circ \\ \sin 360^\circ & \cos 360^\circ \end{bmatrix} = 64\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix}$