15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 1)

設 A,B 為樣本空間 S 中的兩事件，若 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，$P(B')=\frac{5}{8}$，求

(1)$P(A|B)=$ ____________ .(2)$P(B'|A)=$ ____________ .

(3)$P(B|A')=$ ____________ .(4)$P(B'|A')=$ ____________ .

解答　(1)$\frac{1}{3}$;(2)$\frac{3}{4}$;(3)$\frac{1}{2}$;(4)$\frac{1}{2}$

解析

$$P(B)=1-P(B')=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8},$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{8}$，

(1) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$. (2) $P(B'|A)=\frac{P(A\cap B')}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$.

(3) $P(B|A')=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{\frac{3}{8}-\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

(4) $P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{P[(A\cup B)']}{P(A')}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 2)

擲一粒公正的骰子兩次，設 A 表示第一次擲出奇數點的事件，B 表示兩次的點數和等於 8 點的事件，

則(1)$P(A|B)=$ ____________ .(2)$P(B|A)=$ ____________ .

解答　(1)$\frac{2}{5}$;(2)$\frac{1}{9}$

解析

設兩次之點數分別為 x，y，$x+y=8\Rightarrow(x,y)=(2,6)$，$(3,5)$，$(4,4)$，$(5,3)$，$(6,2)$，

(1) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{2}{5}$.

(2) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{9}$.

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 3)

設袋中有 5 白球 3 黑球 4 紅球，今從袋中每次取一球，連續取三次．若取後不放回，則 (1)三次均取到白球的機率為＿＿＿＿＿＿． (2)依序取到白球、黑球、紅球的機率為＿＿＿＿＿＿． (3)三次均取到不同色球的機率為＿＿＿＿＿＿． (4)三次均取到同色球的機率為＿＿＿＿＿＿．	

解答　(1)$\frac{1}{22}$;(2)$\frac{1}{22}$;(3)$\frac{3}{11}$;(4)$\frac{3}{44}$

解析

(1)設 A 表示第一次取到白球的事件，B 表示第二次取到白球的事件，C 表示第三次取到白球的事件，則

$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)=\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{22}$．

(2)設 A 表示第一次取到白球的事件，D 表示第二次取到黑球的事件，E 表示第三次取到紅球的事件，則

$P(A\cap D\cap E)=\frac{5}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{1}{22}$．

(3)三次均取到不同色球的情形為三種顏色的直線排列，有 3!＝6 種，

由(2)可知，每一種的機率均為$\frac{1}{22}$，故得$3!\times\frac{1}{22}=\frac{3}{11}$．

(4)三次均取到同色球(白白白)、(黑黑黑)、(紅紅紅)的機率

$=\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}+\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}=\frac{3}{44}$．

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 4)

一袋中有 4 白球，3 黑球，由甲開始甲、乙二人輪流取出一球，先取得白球者勝， (1)若取出球不再放回時，則甲獲勝的機率為＿＿＿＿＿＿． (2)若取出球仍放回袋中，則甲獲勝的機率為＿＿＿＿＿＿． 【臺中女中月考】	

解答　(1)$\frac{24}{35}$;(2)$\frac{7}{10}$

解析　(1) P (甲勝)$=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{35}$．

(2)P (甲勝)$=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}+\cdots=\frac{\frac{4}{7}}{1-(\frac{3}{7})^2}=\frac{7}{10}$．

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 5)

籤筒的 5 支籤中 2 支有獎，甲乙丙三人先後各抽 1 支籤，抽完後不放回， 求(1)甲中獎的機率．(2)乙中獎的機率．(3)丙中獎的機率．	

解答　(1)$\frac{2}{5}$;(2)$\frac{2}{5}$;(3)$\frac{2}{5}$

解析　設事件 A，B，C 分別代表甲，乙，丙中獎的事件．

(1)事件 A 發生的機率為 $P(A)=\frac{2}{5}$．

(2)乙中獎的情形可分為甲乙都中獎 $A\cap B$ 和甲不中乙中 $A'\cap B$ 兩種情形，且兩者為互斥事件．又因為

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}，\quad P(A'\cap B)=P(A')\cdot P(B\,|\,A')=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}，$$

所以 $P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$．

(3)丙中獎的情形可分為甲丙中乙不中 $A\cap B'\cap C$，乙丙中甲不中 $A'\cap B\cap C$，和甲乙不中丙中 $A'\cap B'\cap C$ 三種情形，且三者為互斥事件．又因為

$$P(A\cap B'\cap C)=P(A)\cdot P(B'\,|\,A)\cdot P(C\,|\,A\cap B')=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}，$$

$$P(A'\cap B\cap C)=P(A')\cdot P(B\,|\,A')\cdot P(C\,|\,A'\cap B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}，$$

$$P(A'\cap B'\cap C)=P(A')\cdot P(B'\,|\,A')\cdot P(C\,|\,A'\cap B')=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}，$$

所以 $P(C)=P(A\cap B'\cap C)+P(A'\cap B\cap C)+P(A'\cap B'\cap C)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$．

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 6)

擲一均勻的硬幣兩次，令 A 表示第一次出現正面的事件，B 表示第二次出現反面的事件，C 表示出現正面、反面各一次的事件，試問： (1)A，B 是否為獨立事件？(2)A，B，C 是否為獨立事件？	

解答　(1)是;(2)否

解析　A 表示第一次出現正面的事件，B 表示第二次出現反面的事件，C 表示出現正面、反面各一次的事件，

$A=\{(正,正),(正,反)\}$，$B=\{(正,反),(反,反)\}$，$C=\{(正,反),(反,正)\}$，

樣本空間有 $2\times2=4$ 個元素．

(1)$A\cap B=\{(正,反)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$，所以 A，B 是獨立事件．

(2)$A\cap B\cap C=\{(正,反)\}\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$，

所以 A，B，C 不是獨立事件．

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 7)

已知 A，B 是兩獨立事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(A\cup B)=\frac{2}{3}$，求 (1)$P(B)$．　(2)$P(B\|A)$	

解答　(1)$\frac{1}{3}$;(2)$\frac{1}{3}$

解析

因為 A，B 是兩獨立事件，所以 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$．

(1)根據取捨原理，可得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}P(B)$，

即 $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P(B)$．故 $P(B)=\frac{1}{3}$．

(2)$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A)}{P(A)}=P(B)=\frac{1}{3}$．

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 8)

甲、乙、丙三射手同射一靶，每人一發，設甲、乙、丙的射擊命中率各為 0.5，0.6，0.8，並設各人命中靶面的事件為獨立事件，求 (1)靶面恰中一發的機率是____________． (2)若已知靶面恰中一發，則其為丙命中的機率為__________．	

解答　(1)0.26;(2)$\frac{8}{13}$

解析

(1)P(中一發)$=0.5\times0.4\times0.2+0.5\times0.6\times0.2+0.5\times0.4\times0.8=0.26$．

(2)$P(\text{丙中}|\text{中一發})=\dfrac{0.5\times0.4\times0.8}{0.26}=\dfrac{16}{26}=\dfrac{8}{13}$．

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 9)

設某人打靶命中率為$\frac{50}{100}$，求 (1)若此人打 2 發，則此人打中靶（即至少中一發）的機率為____________． (2)若此人中靶之機率能超過 0.9，則此人至少需打_______發．（已知 $\log2=0.3010$） 【嘉義高中月考】	

解答　(1)$\frac{3}{4}$;(2)4

解析

(1)$1-(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$．

(2)$1-(\frac{1}{2})^n>0.9\Rightarrow0.1>(\frac{1}{2})^n\Rightarrow2^n>10$，$\therefore n=4$．

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 10)

設兩事件 A 與 B 滿足 $P(A)=0.5$，$P(A\cup B)=0.8$.
(1)已知 A 與 B 為互斥事件，求 $P(B)$.
(2)已知 A 與 B 為獨立事件，求 $P(B)$.

解答　(1)0.3;(2)0.6

解析

(1)因為 A 與 B 為互斥事件，所以 $P(A\cap B)=0$.
根據取捨原理得知，
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0.8=0.5+P(B)-0$，
解得 $P(B)=0.3$.

(2)因為 A 與 B 為獨立事件，所以 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.5\times P(B)$.
根據取捨原理得知，
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0.8=0.5+P(B)-0.5\times P(B)$解得 $P(B)=0.6$.

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 11)

學校內某社團社員統計表如下,發現其中部分汙損以致不知道二年級女生的人數．已知隨機從該社團抽樣，設 A，B 分別表示抽到男生與抽到二年級學生的事件，且事件 A，B 為兩獨立事件，則二年級女生的人數是多少?

	一年級	二年級
男	6	18
女	4	

解答　12 人

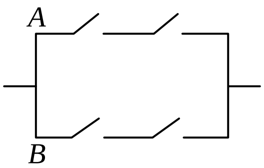
解析　令二年級女生人數為 x，則

$P(A)=\dfrac{6+18}{6+4+18+x}=\dfrac{24}{28+x}$， $P(B)=\dfrac{18+x}{28+x}$， $P(A\cap B)=\dfrac{18}{28+x}$，

$\because A$，B 為獨立事件，$\therefore P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow \dfrac{18}{28+x}=\dfrac{24}{28+x}\times\dfrac{18+x}{28+x}\Rightarrow x=$ 12 .

15-1 條件機率與獨立事件(常考題型 12)

下列電路圖中有 4 個開關，電流通過各開關的機率均為$\frac{2}{3}$，且各開關的操作獨立，試求電流由左端流到右端的機率=______．



【北一女中月考】

解答 $\frac{56}{81}$

解析

$P(A)=P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{56}{81}$ ．