14-2 空間中的直線(常考題型 1)

(1)求通過 $A\,(3\,,1\,,5)$且與$\overrightarrow{N}=(2,3,4)$平行之直線參數式為 ______________ . (2)求通過 $A\,(4\,,2\,,1)$，$B\,(5\,,4\,,3)$兩點之直線參數式為 ______________ .	

解答　(1)$\begin{cases}x=3+2t\\y=1+3t\\z=5+4t\end{cases}$（$t$ 為實數）;(2)$\begin{cases}x=4+t\\y=2+2t\\z=1+2t\end{cases}$（$t$ 為實數）

解析　(1)$\begin{cases}x=3+2t\\y=1+3t\\z=5+4t\end{cases}$（$t$ 為實數）.

(2)$\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$，直線 AB 之參數式為$\begin{cases}x=4+t\\y=2+2t\\z=1+2t\end{cases}$（$t$ 為實數）.

14-2 空間中的直線(常考題型 2)

(1)求通過 $A(2,1,3)$，$B(3,-2,1)$兩點之直線的對稱比例式 . (2)求直線$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+1}{4}$的參數式 .	

解答　(1)$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$;(2)$\begin{cases}x=1+2t\\y=4+3t\\z=-1+4t\end{cases}$（$t$ 為實數）

解析　(1)因為直線通過點 $A(2,1,3)$，且向量$\overrightarrow{AB}=(1,-3,-2)$是它的一個方向向量，所以直線的對稱比例式為$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$.

(2)由對稱比例式$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+1}{4}$可知：直線通過點$(1,4,-1)$，且$(2,3,4)$是它的一個方向向量，因此直線的參數式為$\begin{cases}x=1+2t\\y=4+3t\\z=-1+4t\end{cases}$（$t$ 為實數）.

14-2 空間中的直線(常考題型 3)

設直線 L 的方程式為 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$，則下列哪一個平面與 L 平行?
(1)$2x-y+z=1$　(2)$x+y-z=2$　(3)$3x-y+2z=1$
(4)$3x+2y+z=2$　(5)$x-3y+z=1$．

解答　2

解析　若平面與直線平行，則平面的法向量將與直線的方向向量垂直，且直線上的點均不在平面上．
由直線 $L:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 可知：L 的方向向量為$(3,-1,2)$，L 上一定點$(2,-1,1)$．(1)因為 $2x-y+z=1$ 的法向量為$(2,-1,1)$，又$(2,-1,1)\cdot(3,-1,2)=9\neq0$，所以平面與直線不平行．(2)因為 $x+y-z=2$ 的法向量為$(1,1,-1)$，又$(1,1,-1)\cdot(3,-1,2)=0$，所以平面與直線可能平行，將定點$(2,-1,1)$代入 $x+y-z=2$，得 $2+(-1)-1=0\neq2$，因此定點不在平面上，即平面與直線平行．(3)因為 $3x-y+2z=1$ 的法向量為$(3,-1,2)$，又$(3,-1,2)\cdot(3,-1,2)=14\neq0$，所以平面與直線不平行．(4)因為 $3x+2y+z=2$ 的法向量為$(3,2,1)$，又$(3,2,1)\cdot(3,-1,2)=9\neq0$，所以平面與直線不平行．(5)因為 $x-3y+z=1$ 的法向量為$(1,-3,1)$，又$(1,-3,1)\cdot(3,-1,2)=8\neq0$，所以平面與直線不平行．由上面的討論可知：正確的選項為(2

14-2 空間中的直線(常考題型 4)

已知 $A(2,3,1)$，$B(3,2,1)$是空間中二點，
求直線 AB 與平面 $3x-2y+z=11$ 的交點坐標．

解答　(4,1,1)

解析　由題意可知：$\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$，直線 AB 的參數式為$\begin{cases}x=2+t\\y=3-t\\z=1\end{cases}$（$t$ 為實數）．

設直線 AB 與平面的交點為 $P(2+t,3-t,1)$．將其代入平面 $3x-2y+z=11$，得 $5t+1=11$，解得 $t=2$，再代回 P 點，得直線 AB 與平面 $3x-2y+z=11$ 的交點坐標為$(4,1,1)$．

14-2 空間中的直線(常考題型 5)

下列哪一個平面包含 z 軸? (1)$x=3$　(2)$z=3$　(3)$x+y=0$　(4)$x-z=4$　(5)$x+y+z=2$．	

解答　3

解析　因為 z 軸上的點可表示為$(0,0,t)$，t 是實數，所以將$(0,0,t)$代入各方程式，

得(1)$0=3$，　(2)$t=3$，　(3)$0=0$，　(4)$-t=4$，　(5)$t=2$．

僅(3)為恆等式，因此正確的選項為(3)．

14-2 空間中的直線(常考題型 6)

設點 $P(1,1,-2)$，直線 L：$\frac{x-5}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{-2}$， (1)自 P 點作直線 L 的垂線與直線 L 交於 H， 求 H 點坐標為_____________． (2)求點 P 到直線 L 的距離為_____________． 【中山女高月考】	

解答　(1)$(7,3,1)$;(2)7

解析

(1)令 H 的坐標為$(2t+5,6-3t,3-2t)$，$\because \overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{v}=(2,-3,-2)$，

$\therefore (2t+4,5-3t,5-2t)\cdot(2,-3,-2)=0\Rightarrow t=1\Rightarrow H(7,3,1)$．

(2)$d(P,L)=\overline{PH}=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=7$

14-2 空間中的直線(常考題型 7)

已知兩點 $A(-1,2,-3)$，$B(3,-6,-4)$及平面 $E:2x+y-2z+3=0$，
(1)線段$\overline{AB}$在 E 上的正射影長=____________；
(2)點 A 關於平面 E 的對稱點坐標為____________；
(3)若點 P 在 E 上，則$\overline{PA}+\overline{PB}$最小值為____________．
【宜蘭高中月考】

解答　(1)$\frac{5}{3}\sqrt{29}$;(2)$(-5,0,1)$;(3)$5\sqrt{5}$

解析

(1) $\overrightarrow{AB}=(4,-8,-1)\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+64+1}=9$，
$\overrightarrow{n}=(2,1,-2)$，$\cos\theta=\frac{8-8+2}{9\cdot3}=\frac{2}{27}\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{1-(\frac{2}{27})^2}=\sqrt{\frac{725}{27^2}}=\frac{5}{27}\sqrt{29}$，
∴正射影長$=9\cdot\frac{5}{27}\sqrt{29}=\frac{5}{3}\sqrt{29}$．(2)令 $H(-1+2t,2+t,-3-2t)$，
代入 E：$-2+4t+2+t+6+4t+3=0$，$9t=-9\Rightarrow t=-1\Rightarrow H(-3,1,-1)$，∴$A'(-5,0,1)$．(3) $(-2+2+6+3)(6-6+8+3)>0$，∴A，B 在 E 同側，
$\Rightarrow\overline{PA}+\overline{PB}$最小值$=\overline{A'B}=\sqrt{64+36+25}=5\sqrt{5}$．

14-2 空間中的直線(常考題型 8)

在空間坐標中，已知一點 $A(1,0,1)$及一直線 L：$\frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$，試求：
(1)直線 L 上與點 A 距離最近的點坐標為____________．
(2)過點 A 且包含直線 L 的平面方程式為____________．
【松山高中月考】

解答　(1)$(0,-1,2)$;(2)$y+z-1=0$

解析

(1)設 L 上與 A 點距離最近的點為 B，則 B 的坐標為$(2t-4,-t+1,t)$，∵$\overline{AB}\perp L$，∴$(2t-5,1-t,t-1)\cdot(2,-1,1)=0\Rightarrow6t-12=0\Rightarrow t=2$，∴$B(0,-1,2)$．

(2)由 L：$\frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}\Rightarrow L$：$\begin{cases}x+2y+2=0\\y+z-1=0\end{cases}$，設所求平面為 E：$(y+z-1)+k(x+2y+2)=0$　∵E 通過 A，∴代入可得：$3k=0\Rightarrow k=0$，∴E 的方程式為 $y+z-1=0$．

14-2 空間中的直線(常考題型 9)

求兩直線 L_1：$\frac{x+2}{8}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{4}$與 L_2：$\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-4}{1}$的交點坐標為____________. 【新竹高中月考】	

解答　(2 , − 1 , 3)

解析

令 $P(8t-2\,,-2t\,,4t+1)$為 L_1與 L_2交點，

代入 L_2：$\frac{8t-6}{2}=\frac{-2t+2}{-1}=\frac{4t-3}{1}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$，∴交點為(2 , − 1 , 3

14-2 空間中的直線(常考題型 10)

已知兩直線$L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2}$與$L_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+3}{1}$，試求： (1)$L_1$與 L_2之交點坐標____________； (2)包含 L_1與 L_2之平面方程式為____________.	

解答　(1)(5,1, − 1);(2)$3x+4y+5z=14$

解析　(1) $L_1:\begin{cases}x=2t+1\\y=t-1\\z=-2t+3\end{cases}$，$t$ 為實數，$L_2:\begin{cases}x=s+3\\y=-2s+5\\z=s-3\end{cases}$，$s$ 為實數，

$\therefore\begin{cases}2t+1=s+3\cdots\cdots①\\t-1=-2s+5\cdots\cdots②\\-2t+3=s-3\cdots\cdots③\end{cases}$，① + ③：$4=2s$，$\therefore s=2$，∴交點(5,1, − 1).

(2) $\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{V_1}$ 且 $\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{V_2}$

$\therefore\overrightarrow{N}=\overrightarrow{V_1}\times\overrightarrow{V_2}=(2,1,-2)\times(1,-2,1)=(-3,-4,-5)=-(3,4,5)$

$\Rightarrow 3(x-1)+4(y+1)+5(z-3)=0$，$\therefore E:3x+4y+5z=14$.

14-2 空間中的直線(常考題型 11)

演唱會需要投射兩道雷射燈光在舞臺處交會．現設定空間坐標，一道雷射燈光由點(2,1,2)朝向點(3,3,3)發射，另一道燈光則由點(3,2,k)沿著平行於 y 軸的方向發射，
試問：當 k 為何值時，兩道燈光會相交？又其相交的坐標為何？

解答　$k=3$，相交坐標 $(3,3,3)$

解析　一道雷射燈光由點(2,1,2)朝向點(3,3,3)發射，其方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(1,2,1)$，因此燈光行走之路徑所在的直線參數式為 $\begin{cases}x=2+t\\y=1+2t\\z=2+t\end{cases}$（$t$ 為實數）；另一道雷射燈光由點(3,2,k)沿著平行於 y 軸的方向發射，其方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(0,1,0)$，因此燈光行走之路徑所在的直線參數式為 $\begin{cases}x=3\\y=2+s\\z=k\end{cases}$（$s$ 為實數）．因為兩道燈光於舞臺處相交，所以相交的坐標滿足 $\begin{cases}2+t=3\\1+2t=2+s\\2+t=k\end{cases}$，
解得 $t=1$，$s=1$，$k=3$．
故當 $k=3$ 時，兩道燈光在舞臺處相交，且其交點的坐標為(3,3,3)．

14-2 空間中的直線(常考題型 12)

已知直線 L_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ 與 L_2：$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$，都在平面 E 上，則平面 E 的方程式為____________．

解答　$7x+5y-3z-1=0$

解析　L_1 上取一點 $A(1,0,2)$，L_2 上取一點 $B(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,1,-3)$，$\overrightarrow{N_{L_2}}=(1,-2,-1)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{N_{L_2}}=(-7,-5,3)=-(7,5,-3)$，所求平面為 $7(x-1)+5(y-0)-3(z-2)=0 \Rightarrow 7x+5y-3z-1=0$．