14-1 空間中的平面(常考題型 1)

若空間中包含三點 $A\,(0\,,1\,,1)$，$B\,(-1\,,-1\,,0)$，$C\,(-6\,,0\,,3)$ 的平面 E：$ax+by+cz=3$，則序組$(a\,,b\,,c)=$______________.

解答　$(5\,,-8\,,11)$

解析　$\overrightarrow{AB}=(-1,-2,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-6,-1,2)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-5,8,-11)=-(5,-8,11)$，
所求平面方程式為 $5(x-0)-8(y-1)+11(z-1)=0 \;\Rightarrow\; 5x-8y+11z=3$，$\therefore(a\,,b\,,c)=(5\,,-8\,,11)$.

14-1 空間中的平面(常考題型 2)

空間中四點 $ABCD$，$A(-1,1,2)$，$B(0,-1,4)$，$C(-3,5,6)$，$D(1,2,0)$，設一平面 E 包含 A 點；若光線從點 C 射向 A 點會反射通過 D 點，則此平面 E 的方程式為______________.

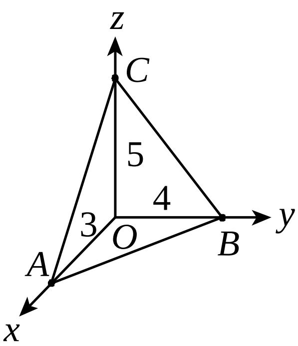
【松山高中月考】

解答　$x+3y=2$

解析　$\overrightarrow{AC}=(-2,4,4)$，$\overrightarrow{AD}=(2,1,-2)$，設 $\overrightarrow{AP}$ 為 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 的角平分線，故 $\overrightarrow{AP}$ 為 E 的法向量，
得 $E:\dfrac{2}{3}(x+1)+2(y-1)+0(z-2)=0\Rightarrow x+3y=2$.

14-1 空間中的平面(常考題型 3)

設 A，B，C 為空間坐標中的三點，且分別在 x 軸，y 軸與 z 軸的正向上，O 為原點，且 $\overline{OA}=3$，$\overline{OB}=4$，$\overline{OC}=5$，如圖所示．
(1)求通過 A，B，C 三點之平面 E 的方程式．
(2)若 $D(3,2,c)$為平面 E 上一點，則 c 的值為何?



解答　(1)$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$;(2)$-\frac{5}{2}$

解析

(1)由圖可知 A，B，C 三點的坐標分別為 $A(3,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(0,0,5)$．
利用截距式可得平面 E 的方程式為$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$．
(2)因為 $D(3,2,c)$為平面 E 上一點，所以$\frac{3}{3}+\frac{2}{4}+\frac{c}{5}=1$，解得$c=-\frac{5}{2}$．

14-1 空間中的平面(常考題型 4)

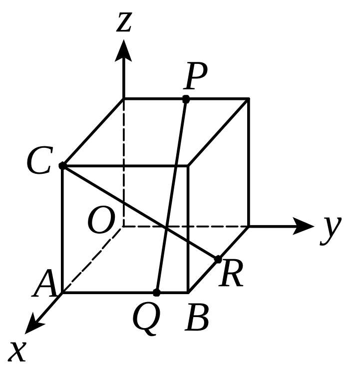
求平面 E：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$與三坐標平面所圍成的四面體體積為____________．

解答　$\frac{1}{6}|abc|$

解析　體積$=\frac{1}{3}\times$底面積 × 高 $=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|ab|\cdot|c|=\frac{1}{6}|abc|$

14-1 空間中的平面(常考題型 5)

如圖是空間坐標中的一個正立方體．已知點 C 的坐標為(2,0,2)，P，R 分別為正立方體邊上的中點，Q 為邊 $\overline{AB}$ 上一點，且 $\overline{CR}$ 與 $\overline{PQ}$ 相交於一點，求
(1)平面 CPR 的方程式．
(2) $\overline{AQ}:\overline{QB}$ ．



解答　(1) $2x+4y+3z=10$;(2)3：1

解析

由題意可知：正立方體的邊長為 2，$P(0,1,2)$，$R(1,2,0)$且 $\overrightarrow{CP}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{CR}=(-1,2,-2)$．
(1)計算 $\overrightarrow{CP}\times\overrightarrow{CR}=(-2,-4,-3)$，可令平面 CPR 的方程式為 $2x+4y+3z=d$，並將 $C(2,0,2)$ 代入得 $d=10$，故得方程式為 $2x+4y+3z=10$．
(2)由圖可設 Q 點的坐標為$(2,t,0)$．
因為 $\overline{CR}$ 與 $\overline{PQ}$ 相交於一點，所以 Q 點也在平面 CPR 上，
將其代入 $2x+4y+3z=10$，得 $4+4t=10$，解得 $t=\frac{3}{2}$，即 $\overline{AQ}=\frac{3}{2}$，
故 $\overline{AQ}:\overline{QB}=\frac{3}{2}:(2-\frac{3}{2})=3:1$ ．

14-1 空間中的平面(常考題型 6)

兩平面 E_1：$x+y-1=0$，E_2：$2x+y-2z-2=0$，
則平面 E_1 與 E_2 的夾角為______________．

【和平高中月考】

解答　45° 或 135°

解析　$\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}=\pm\frac{(1,1,0)\cdot(2,1,-2)}{\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{\pm 3}{\sqrt{2}\cdot 3}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore\theta=45^\circ$ 或 135° ．

14-1 空間中的平面(常考題型 7)

設三平面 E_1：$x-ky+z-1=0$，E_2：$2x+y-z+2=0$， E_3：$lx+y+2z-1=0$（k，l 為實數） (1)若 $E_1\perp E_2$，求 k 之值； (2)若 $E_1 // E_3$，求 k，l 之值．	

解答　(1)1;(2) $-\frac{1}{2},2$

解析

(1) $\overrightarrow{N_1}=(1,-k,1)$，$\overrightarrow{N_2}=(2,1,-1)$，$\overrightarrow{N_3}=(l,1,2)$，

$\because E_1\perp E_2$，$\therefore \overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=0$，$1\cdot2+(-k)\cdot1+1\cdot(-1)=0\Rightarrow k=1$．

(2) $\because E_1 // E_3$，$\therefore \frac{1}{l}=\frac{-k}{1}=\frac{1}{2}\Rightarrow k=-\frac{1}{2},l=2$．

14-1 空間中的平面(常考題型 8)

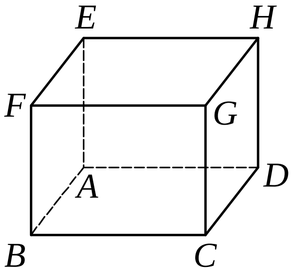
點 $A(-3,5,3)$到平面 E：$8x-14y-4z+37=0$ 的距離為 ________________． 【和平高中月考】	

解答　$\frac{\sqrt{69}}{2}$

解析　$d(A,E)=\frac{|-24-70-12+37|}{\sqrt{64+196+16}}=\frac{69}{\sqrt{276}}=\frac{69}{2\sqrt{69}}=\frac{\sqrt{69}}{2}$

14-1 空間中的平面(常考題型 9)

如圖所示 $ABCD-EFGH$ 是一長方體，邊長為 $\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=4$，$\overline{AE}=3$，求點 F 到 A，C，H 三點所決定平面的距離．

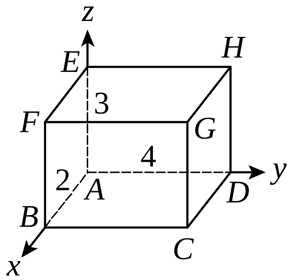


解答　$\dfrac{24\sqrt{61}}{61}$

解析　建立坐標系，使 $A(0,0,0)$，$C(2,4,0)$，$H(0,4,3)$，$F(2,0,3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,4,0)$，$\overrightarrow{AH}=(0,4,3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AH}=(12,-6,8)$，

取平面 ACH 的方程式的法向量為$(6,-3,4)$，



平面 ACH 為 $6(x-0)-3(y-0)+4(z-0)=0$，即 $6x-3y+4z=0$，

$\Rightarrow F$ 到平面 ACH 的距離為 $\dfrac{|6\times2-3\times0+4\times3|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+4^2}}=\dfrac{24\sqrt{61}}{61}$．