13-4 外積與三階行列式(常考題型 1)

求下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 20 & 30 & 25 \\ -12 & 36 & 18 \\ 16 & -24 & -7 \end{vmatrix}=$ ________．(2) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{5} & \sqrt{8} \\ -1 & 1 & -2 \\ \log 2 & \log 3 & \log 4 \end{vmatrix}=$ ________．

【北一女中月考】

解答　(1)2520;(2)0

解析

(1)原式 $=5\times6\times\begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ -2 & 6 & 3 \\ 16 & -24 & -7 \end{vmatrix}=30\times2\times6\times\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 8 & -4 & -7 \end{vmatrix}=360\times7=2520$ ．

(2)原式 $=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -2 \\ \log 2 & \log 3 & 2\log 2 \end{vmatrix}=0$ ．(∵第一、三行成比例，其值為 0)

13-4 外積與三階行列式(常考題型 2)

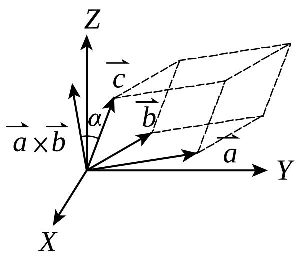
(1)試證明，空間中，由不共平面的三向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 所張成的平行六面體體積為 V，則 $V=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|$ ．

(2)求 $\overrightarrow{a}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{b}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{c}=(0,1,1)$ 所張成的平行六面體體積．

解答　(1)見解析;(2)2

解析　(1)由 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 所張的平行四邊形面積為 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$ ．

如圖，我們可知 $V=$ 底面積 × 高．



其中「底面積」$=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$ ．

高 $h=\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 上的投影長 $=\dfrac{|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|}$ ．

$\Rightarrow V=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|\times h=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|\times\dfrac{|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|}=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|$ ．

(2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix})=(1,-1,-1)$ ．

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 所張成的平行六面體體積為

$|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=|(1,-1,-1)\cdot(0,1,1)|=2$ ．

13-4 外積與三階行列式(常考題型 3)

以 $A(1,2,3)$，$B(2,3,4)$，$C(-1,2,1)$，$D(3,1,4)$四點為頂點之四面體的體積為______________.

解答　$\frac{1}{3}$

解析　$\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,-1,1)$，

四面體體積 $=\frac{1}{6}\times\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{3}$.

13-4 外積與三階行列式(常考題型 4)

求以 $P(1,-1,2)$，$Q(2,5,8)$，$R(-3,1,-1)$，$S(3,-1,2)$四點為頂點的四面體體積 .

解答　10

解析　$\overrightarrow{PQ}=(1,6,6)$，$\overrightarrow{PR}=(-4,2,-3)$，$\overrightarrow{PS}=(2,0,0)$，

$\therefore V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -4 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|-36-24|=10$.