

12-3 二階行列式(常考題型 1)

1. 求下列各行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(2) \begin{vmatrix} 55 & 56 \\ 57 & 58 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(3) \begin{vmatrix} 34 & -28 \\ -17 & 14 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} .$$



解答

(1) -11 ; (2) -2 ; (3) 0

12-3 二階行列式(常考題型 2)

下列何者恆正確?

$$(1) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b+ka & a \\ d+kc & c \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e+ka & f+kb \\ a & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ e-c & f-d \end{vmatrix}$$

$$(4) \text{若 } \begin{vmatrix} \sin 3\theta & \cos 3\theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1, \text{ 則 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 401 & 399 \\ 391 & 409 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4994 & 4998 \\ 2994 & 2998 \end{vmatrix} .$$



【嘉義女中月考】

解答

235

12-3 二階行列式(常考題型 3)

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 20$ ，求 $\begin{vmatrix} 2a+5b & a+2b \\ 2c+5d & c+2d \end{vmatrix}$ 之值為

(1) -10 (2) 10 (3) -20 (4) 20 (5) -40 .

【師大附中月考】



解答 3

解析

$$\begin{vmatrix} 2a+5b & a+2b \\ 2c+5d & c+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a+2b \\ d & c+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -20,$$

故選(3) .

12-3 二階行列式(常考題型 4)

求由向量 $\vec{a} = (5, 8)$ ， $\vec{b} = (-4, -3)$ 所張出的

(1) 平行四邊形面積為_____，

(2) 三角形面積為_____ .

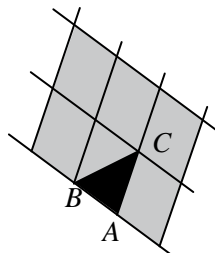


解答 (1) 17; (2) $\frac{17}{2}$

解析

(1) 平行四邊形面積為 $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 17$.

(2) 三角形面積為 $\frac{17}{2}$.



12-3 二階行列式(常考題型 5)

平面上三點 $A(3, -2)$, $B(-1, 1)$, $C(5, 4)$, 求

(1) $\triangle ABC$ 之面積為_____。

(2) 若點 P 滿足 $\vec{AP} = r\vec{AB} + s\vec{AC}$ 且 $-1 \leq r \leq 2$, $0 \leq s \leq 2$, 求 P 點所成區域的面積為_____。



解答

(1)15;(2)180

解析

(1) $\vec{AB} = (-4, 3)$, $\vec{AC} = (2, 6)$

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right| = 15 .$$

(2) P 點所成區域面積為 $12\triangle ABC$ 的面積 $= 12 \times 15 = 180$.

12-3 二階行列式(常考題型 6)

解下列方程組，並說明其幾何意義：

(1) $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 10x + 6y = 29 \end{cases}$ · (2) $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 6x + 8y = 24 \end{cases}$ · (3) $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 6x + 8y = 36 \end{cases}$.



解答

(1) $x = 2$, $y = \frac{3}{2}$, 其幾何意義為二直線恰交於一點 $(2, \frac{3}{2})$; (2) 無限多解, 其幾何意義為兩直線重合, 故解為直線 $3x + 4y = 12$ 上的任一點; (3) 無解, 其幾何意義為兩直線平行

12-3 二階行列式(常考題型 7)

1. 已知方程組 $\begin{cases} 2x+(3-a)y=a+5 \\ (3-a)x+2y=7-a \end{cases}$, 試就 a 值討論方程組的解並說明此方程組的解之幾何意義.



解答

$a \neq 1$ 且 $a \neq 5$, 方程組恰有一解 $x = \frac{a-11}{a-5}$; $y = \frac{-a-1}{a-5}$, 表示兩直線恰交於一點 $(\frac{a-11}{a-5}, \frac{-a-1}{a-5})$; $a = 5$ 時, 方程組無解, 代表兩直線平行; $a = 1$ 時, 方程組無限多解, 代表兩直線重合; 其解可寫為 $\begin{cases} x=t \\ y=3-t \end{cases}$, t 為實數

12-3 二階行列式(常考題型 8)

已知 $\vec{a} = (-4, 3)$ 與 $\vec{b} = (6, t)$ 平行, 求實數 t 的值.



解答

$-\frac{9}{2}$

解析

因為 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 所以 $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 6 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4t - 18 = 0$. 解得 $t = -\frac{9}{2}$.

12-3 二階行列式(常考題型 9)

利用克拉瑪公式解方程組：
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{6}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{12}{y} = -1 \end{cases}$$



解答 $x = 1, y = 2$

解析

令 $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$, 故
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{6}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{12}{y} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + 6v = 4 \\ 5u - 12v = -1 \end{cases}$$

$$u = \frac{\Delta_u}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -12 \end{vmatrix}} = \frac{-42}{-42} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$v = \frac{\Delta_v}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -12 \end{vmatrix}} = \frac{-21}{-42} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$$

因此解為 $x = 1, y = 2$.

12-3 二階行列式(常考題型 10)

已知 $xyz \neq 0$, 且
$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$$
, 求: (1) $x : y : z$. (2) $\frac{xy + 2yz + 2zx}{x^2 + y^2 + 3z^2} = ?$



解答 (1) $-14 : 11 : 1$; (2) $-\frac{1}{2}$

解析

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 2z \\ 2x + 3y = 5z \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2z & 4 \\ 5z & 3 \end{vmatrix} = 6z - 20z = -14z; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2z \\ 2 & 5z \end{vmatrix} = 15z - 4z = 11z.$$

因此 $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-14z}{1} = -14z; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11z}{1} = 11z$

(1) $x : y : z = -14z : 11z : z = -14 : 11 : 1$.

(2) 令 $x = -14t, y = 11t, z = t, t \neq 0$

$$\frac{xy + 2yz + 2zx}{x^2 + y^2 + 3z^2} = \frac{-154t^2 + 22t^2 - 28t^2}{196t^2 + 121t^2 + 3t^2} = \frac{-160}{320} = -\frac{1}{2}.$$

12-3 二階行列式(常考題型 11)

工廠有甲與乙共二條生產線，現欲生產三百個產品。如果甲、乙二條線同時開動，則需 12 小時；如果先讓甲生產線開動 4 小時，而餘下的工作由乙生產線單獨完成，需再開動 24 小時才能完成所有產品。問如果只開動乙生產線，則需多少小時才能生產三百個產品。



解答 30 小時

解析

設甲，乙 1 小時各完成 x ， y 個產品。

由題意，可列得 $\begin{cases} 12x+12y=300 \\ 4x+24y=300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=25 \quad \text{①} \\ x+6y=75 \quad \text{②} \end{cases}$

由② - ①得 $y=10$ ，代入①得 $x=15$ 。

故只開動乙需 $\frac{300}{10}=30$ 小時才能生產三百個產品。

12-3 二階行列式(常考題型 12)

容量為 200 立方公尺的水塔，由 A 水管注入水，B，C 兩水管放水，現知水塔滿水位，若三管齊開，則 30 分鐘水乾，只開 A，B 兩管，2 小時水乾，只開 A，C 兩管，1 小時水乾，則 A 水管每小時注水量為_____立方公尺。



【嘉義女中月考】

解答 100

解析

設 A 水管每小時注水量為 xm^3

B，C 水管每小時注水量為 ym^3 ， zm^3

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}x = 200 \\ 2y - 2x = 200 \\ z - x = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 400 \cdots \text{①} \\ -x + y = 100 \cdots \text{②} \\ -x + z = 200 \cdots \text{③} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} - \text{③} \Rightarrow x = 100 .$$