12-2 向量的內積(常考題型 1)

已知$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$滿足下列條件，試求$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$的值：

(1)$|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=3$，$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角為 $60°$；.

(2)$|\overrightarrow{a}|=1$，$|\overrightarrow{b}|=5$，$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角為 $120°$；

(3)$|\overrightarrow{a}|=1$，$|\overrightarrow{b}|=2$，$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$同向；

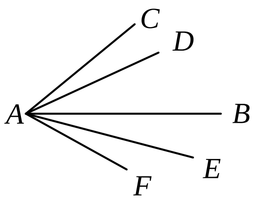
(4)$|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=3$，$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$反向 .

解答　(1)3;(2)$-\frac{5}{2}$;(3)2;(4)-6

12-2 向量的內積(常考題型 2)

如下圖，以 A 為起點，分別以 C、D、E、F 為終點，所成之各向量與$\overrightarrow{AB}$之內積

(1)最大為____________；(2)最小為____________ .



解答　(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$;(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$

12-2 向量的內積(常考題型 3)

在$\triangle ABC$ 中，已知三頂點坐標為 $A(4,-1)$，$B(0,-3)$，$C(7,-2)$，求 (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ． (2)$\angle BAC$ ．	

解答　(1) -10;(2)$135°$

12-2 向量的內積(常考題型 4)

設 $\overrightarrow{a}=(1,2)$， $\overrightarrow{b}=(3,4)$，若 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直， 則 t 之值為______________ ．	

解答　$-\frac{3}{7}$

12-2 向量的內積(常考題型 5)

已知$|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=3$，且$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$的夾角為 60°，求下列各值：
(1)$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$.
(2)$|3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|$.

解答　(1)－5;(2)6

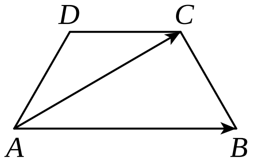
12-2 向量的內積(常考題型 6)

已知$|\overrightarrow{a}|=5$，$|\overrightarrow{b}|=2$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-6$，則
(1)$|2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}|=$______________；
(2)$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$的最小值為______________ .（$t$ 為實數）
【成功高中月考】

解答　(1)$4\sqrt{13}$;(2)4

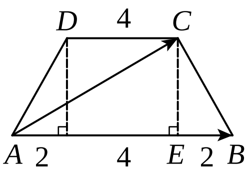
12-2 向量的內積(常考題型 7)

如圖 $ABCD$ 為一等腰梯形，若 $\overline{AB}=8$，$\overline{CD}=4$，試求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.



解答　48

解析　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\overline{AB}\cdot\overline{AE}=8\times6=48$.



12-2 向量的內積(常考題型 8)

設平面上兩直線 L_1：$3x+4y=1$ 與 L_2：$2x+y=1$ 所夾的銳角度量為 θ，則 $\cos\theta=$ ______________ .【北一女中月考】

解答　$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12-2 向量的內積(常考題型 9)

求過$(0,-1)$，且與 $3x+4y-12=0$ 交角成 $45°$的直線方程式為____________．

【台中一中月考】

解答　$x-7y-7=0$ 或 $7x+y+1=0$

12-2 向量的內積(常考題型 10)

平面上三點 $P(8,9)$、$Q(-2,4)$、$R(1,8)$，求

(1)$\overrightarrow{QP}$在$\overrightarrow{QR}$方向上的

①正射影 ＝____________，②射影長 ＝____________．

(2)P 點在直線 QR 上之投影點為____________．

解答　(1)①$(6,8)$②$10$;(2)$(4,12)$

解析

$\overrightarrow{QP}=(10,5)$，$\overrightarrow{QR}=(3,4)$

(1)$\overrightarrow{QP}$在$\overrightarrow{QR}$方向上之正射影為$\left(\dfrac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QR}|^2}\right)\overrightarrow{QR}=\dfrac{30+20}{25}(3,4)=(6,8)$

射影長$\sqrt{6^2+8^2}=10$．

(2)$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QH}=(-2,4)+(6,8)=(4,12)$．　∴ 投影點$(4,12)$．

12-2 向量的內積(常考題型 11)

$A(0,3)$，$B(-1,0)$，則 $\overrightarrow{AB}$ 在直線 $4x-3y+2\sqrt{3}=0$ 上之正射影向量為_______________． 【建國高中月考】	

解答 $(\frac{-9}{5},\frac{-12}{5})$

解析

直線 $4x-3y+2\sqrt{3}=0$ 的方向向量 $\overrightarrow{u}=(3,4)$， $\overrightarrow{AB}=(-1,-3)$

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{u}$ 正射影向量為 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u}=-\frac{3}{5}(3,4)=(\frac{-9}{5},\frac{-12}{5})$ ．

12-2 向量的內積(常考題型 12)

若一直線 $5x+12y=26$，則 $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ 的最小值為_______________．	

解答 $\frac{33}{13}$

解析

$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ 表 $A(1,-1)$與(x,y)之距離

欲求最小值，即求點 A 到直線 $5x+12y-26=0$ 之距離

$d=|\frac{5-12-26}{\sqrt{25+144}}|=\frac{33}{13}$ ．

12-2 向量的內積(常考題型 13)

設連接兩點 $A\,(1\,,3)$和 $B\,(7\,,2)$的線段被直線 L：$x-4y+4=0$ 分成兩段，則此兩線段長之比 ＝____________．

【中山女中月考】

解答　$7：3$

12-2 向量的內積(常考題型 14)

已知兩直線 L_1：$x+2y-4=0$ 與 L_2：$2x+y-4=0$，求兩直線的交角平分線方程式，並指出哪一條是所夾鈍角的平分線方程式．

解答　$x-y=0$

12-2 向量的內積(常考題型 15)

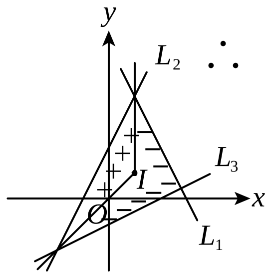
已知三直線 L_1：$2x+y-12=0$，L_2：$2x-y+4=0$， L_3：$x-2y-4=0$ 圍成一三角形，求此三角形之內心坐標．	

解答　$(2,2)$

解析

設內心 $I(x,y)$，則 I 到三邊等距離 $\left|\dfrac{2x+y-12}{\sqrt{2^2+1}}\right|=\left|\dfrac{2x-y+4}{\sqrt{2^2+1}}\right|=\left|\dfrac{x-2y-4}{\sqrt{1+2^2}}\right|$，

得 $\begin{cases}-2x-y+12=2x-y+4\text{（異號區）}\\2x-y+4=-x+2y+4\text{（異號區）}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-8=0\\3x-3y=0\end{cases}$，$\therefore$



$x=2$，$y=2$，內心坐標$(2,2)$．

12-2 向量的內積(常考題型 16)

已知實數 x，y 滿足 $3x+y=24$，求 $9x^2+y^2$ 的最小值， 並求此時 x 與 y 的值．	

解答　當 $x=4$，$y=12$ 時，$9x^2+y^2$ 有最小值 288

解析

利用柯西不等式，得$((3x)^2+y^2)(1^2+1^2)\geq(3x+y)^2$．

將 $3x+y=24$ 代入，得$(9x^2+y^2)\cdot2\geq24^2\Rightarrow9x^2+y^2\geq288$．

而且當 $\frac{3x}{1}=\frac{y}{1}$，即 $3x=y$ 時等號成立．解聯立方程式 $\begin{cases}3x+y=24\\3x=y\end{cases}$

得 $x=4$，$y=12$．

故當 $x=4$，$y=12$ 時，$9x^2+y^2$ 有最小值 288．

12-2 向量的內積(常考題型 17)

若實數 x，y 滿足 $x-2y=14$，當$(x,y)=$？時， $(x-1)^2+9y^2$ 有最小值 ＝？	

解答　$(10,-2)$，117

解析

利用柯西不等式，得 $[(x-1)^2+(3y)^2][1^2+(-\frac{2}{3})^2]\geq(x-1-2y)^2$ ．

$x-2y=14$ 代入，得 $[(x-1)^2+9y^2]\cdot\frac{13}{9}\geq 13^2 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2+9y^2\geq 117$

等號成立　$\Leftrightarrow\quad \frac{x-1}{1}=\frac{3y}{-\frac{2}{3}} \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{9}{2}y+1$

代入 $x-2y=14$，得 $y=-2 \quad\Rightarrow\quad x=10$

$(x-1)^2+9y^2=81+9\cdot 4=117$

故當 $x=10$，$y=-2$ 時，$(x-1)^2+9y^2$ 有最小值 117．

12-2 向量的內積(常考題型 18)

已知 $\overrightarrow{a}=(3,-4)$，$\|\overrightarrow{b}\|=10$，求 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最小值， 並求發生最小值時的 $\overrightarrow{b}$ ．	

解答　最小值為 -50，$\overrightarrow{b}=(-6,8)$

解析

設 $\overrightarrow{b}=(x,y)$ ．由柯西不等式得知，$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\leq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$，

即 $|3x-4y|\leq 5\cdot 10\Rightarrow -50\leq 3x-4y\leq 50$ ．

因此，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最小值為 -50 ．

此時，$\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$，即 $\frac{x}{3}=\frac{y}{-4}$ ．

設 $x=3t$，$y=-4t$，其中 t 為實數．

當 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 有最小值時，$3x-4y=-50$，

即 $3(3t)-4(-4t)=-50$，解得 $t=-2$ ．

故 $\overrightarrow{b}=(-6,8)$ ．

12-2 向量的內積(常考題型 19)

在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=6$，$P$為外心． (1)求內積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的值． (2)求內積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$與$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$的值． (3)設$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$x$，$y$的值．	

解答　(1) -2;(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=8$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=8$;(3) $x=\frac{4}{7}$，$y=\frac{4}{7}$

解析

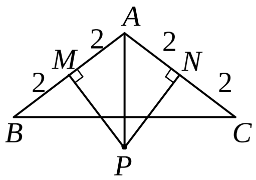
(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=4\times4\times\frac{4^2+4^2-6^2}{2\times4\times4}=-2$．

(2)設M，N分別為$\overline{AB}$與$\overline{AC}$的中點．因為P為外心，所以$\overline{PM}$與$\overline{PN}$分別為$\overline{AB}$與$\overline{AC}$的中垂線．

因此$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\angle BAP=|\overrightarrow{AB}|\times\overline{AM}=4\times2=8$．

同理，可得$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AC}|\times\overline{AN}=4\times2=8$．

(3)分別用$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AC}$對$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$等號兩邊作內積，



得$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+y|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}$

由(1)(2)的結果，可列得$\begin{cases}8=16x-2y\\8=-2x+16y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x-y=4\\x-8y=-4\end{cases}$

解得$x=\frac{4}{7}$，$y=\frac{4}{7}$．