11-2 指數函數及其圖形(常考題型 1)

設 $a>0$，$a\neq 1$，關於函數 $f(x)=a^x$，選出正確的選項：
(1)$f(x)$的圖形恆過點(0,1)
(2)$f(x)$的圖形與 x 軸不相交
(3)$f(x)$的圖形與任一條水平線相交
(4)$f(x)$的圖形與任一條鉛垂線相交
(5)若 $\alpha<\beta$,則 $f(\alpha)<f(\beta)$.

解答　124

解析

(1)因為 $a^0=1$，所以 $f(x)$的圖形恆過點(0,1) .
(2)因為 $f(x)$的圖恆在 x 軸的上方，所以與 x 軸不相交 .
(3)$f(x)$的圖形與在 x 軸上方的任一條水平線皆恰有一個交點 .
(4)$f(x)$的圖形與任一條鉛垂線均恰有一個交點 .
(5)當 $a>1$ 時，才滿足「若 $\alpha<\beta$，則 $f(\alpha)<f(\beta)$」.
由上面的討論可知：正確的選項為(1)(2)(4) .

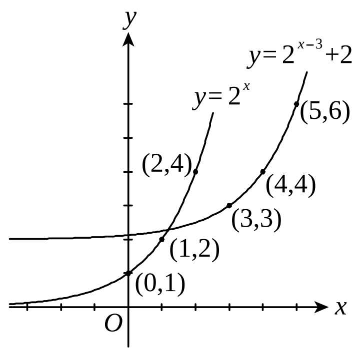
11-2 指數函數及其圖形(常考題型 2)

利用 $y=2^x$ 的圖形作 $y-2=\frac{2^x}{8}$ 的圖形 .

解答　見解析

解析

$y-2=\frac{2^x}{8}\Rightarrow y-2=2^{x-3}\Rightarrow y=2^{x-3}+2$，將 $y=2^x$ 的圖形向右平移 3 單位,向上平移 2 單位,即得所求圖形 .



11-2 指數函數及其圖形(常考題型 3)

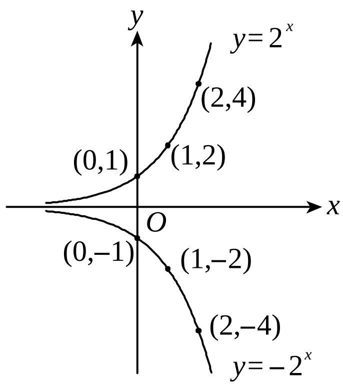
作$|y|=2^x$之圖形．

解答　見解析

解析

① $y\geq 0$，$y=2^x$．

② $y<0$，$-y=2^x\Rightarrow y=-2^x$．



11-2 指數函數及其圖形(常考題型 4)

觀察相關的函數圖形，判斷下列選項何者為真?

(1)$10^x = x$ 有實數解

(2)$10^x = x^2$ 有實數解

(3)為實數時，$10^x > x$ 恆成立

(4)$x > 0$ 時，$10^x > x^2$ 恆成立

(5)$10^x = -x$ 有實數解．

【91 學測】

解答　2345

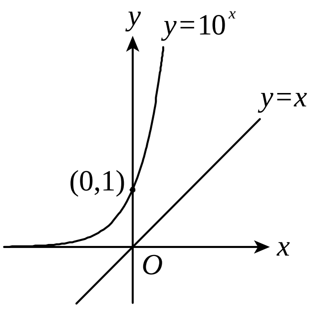
解析

(1)$10^x = x \Rightarrow \begin{cases} y = 10^x \\ y = x \end{cases}$ 由圖形之相交狀況即可知是否有解．

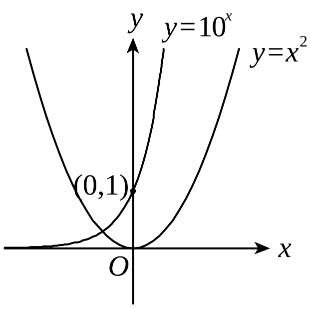
(2)$10^x = x^2 \Rightarrow \begin{cases} y = 10^x \\ y = x^2 \end{cases}$．(3)由圖一可知 $10^x > x$．

(4)由圖二可知當 $x > 0$，$10^x > x^2$．(5)$10^x = -x \Rightarrow \begin{cases} y = 10^x \\ y = -x \end{cases}$ 有實數解．

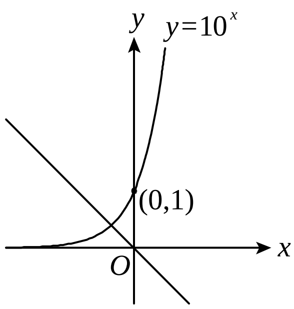
圖一



圖二



圖三



11-2 指數函數及其圖形(常考題型 5)

比較下列各組數的大小關係：

(1) $(\sqrt{2})^{1.5}$，$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，1＿＿＿＿＿＿＿＿＿ .

(2) $(0.5)^3$，$(0.5)^{1.5}$，$\dfrac{1}{2}$，2^{-2}＿＿＿＿＿＿＿＿＿ .

解答　(1) $(\sqrt{2})^{1.5} > (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > 1 > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;(2) $(0.5)^3 < 2^{-2} < (0.5)^{1.5} < \dfrac{1}{2}$

解析

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = (\sqrt{2})^{-1}$，$1 = \sqrt{2}^{0}$，又 $\sqrt{2} \approx 1.414$，

因為底數 $\sqrt{2} > 1$，所以 $(\sqrt{2})^{1.5} > (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > 1 > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\dfrac{1}{2} = (0.5)^1$，$2^{-2} = (0.5)^2$，因為底數 $0.5 < 1$，所以 $(0.5)^3 < 2^{-2} < (0.5)^{1.5} < \dfrac{1}{2}$.

11-2 指數函數及其圖形(常考題型 6)

解下列方程式：

(1) $(\sqrt{3})^{3x+1} = 27\sqrt{3}$.

(2) $4^{3x^2} = 2^{10x+4}$.

解答　(1)2; (2) $x = -\dfrac{1}{3}$ 或 $x = 2$

解析

(1)因為 $(\sqrt{3})^{3x+1} = (3^{\frac{1}{2}})^{3x+1} = 3^{\frac{3x+1}{2}}$，又 $27\sqrt{3} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{7}{2}}$，所以方程式可化為 $3^{\frac{3x+1}{2}} = 3^{\frac{7}{2}}$，

即 $\dfrac{3x+1}{2} = \dfrac{7}{2}$，解得 $x = 2$.

(2)因為 $4^{3x^2} = (2^2)^{3x^2} = 2^{6x^2}$，所以方程式可化成 $2^{6x^2} = 2^{10x+4}$.即 $6x^2 = 10x + 4$，

解得 $x = -\dfrac{1}{3}$ 或 $x = 2$.

11-2 指數函數及其圖形(常考題型 7)

解指數不等式$(\frac{1}{3})^{x^2+3x-1}\geq\frac{1}{27}$，得$x$的範圍為________________ .

【台南一中月考】

解答　$-4\leq x\leq 1$

解析

$(\frac{1}{3})^{x^2+3x-1}\geq\frac{1}{27}\Rightarrow 3^{-x^2-3x+1}\geq 3^{-3}$ $\therefore -x^2-3x+1\geq -3$

$\Rightarrow x^2+3x-4\leq 0\Rightarrow (x+4)(x-1)\leq 0$，$\therefore -4\leq x\leq 1$.