10-4 正餘弦的疊合(常考題型 1)

若 $f(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$，則：
(1)當 x 為實數，$f(x)$有最大值 M，最小值 m，
則(M, m) = ______________ .
(2)當 $0 \le x \le \pi$ 時，$f(x)$有最大值 M，最小值 m，
則(M, m) = ______________ .

解答 (1)(2, − 2);(2)(1, − 2)

解析

(1) $f(x)=2(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=2(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3})=2\cos(x+\frac{\pi}{3})$

當 x 為實數，$-1\le\cos(x+\frac{\pi}{3})\le 1$

$\Rightarrow$ $f(x)$之最大值 = 2 × 1 = 2，最小值 = 2 × (− 1) = −2

$\therefore (M, m)$ = (2, − 2) .

(2) $0\le x\le\pi\Rightarrow\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}\Rightarrow -1\le\cos(x+\frac{\pi}{3})\le\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)$之最大值$=2\times\frac{1}{2}=1$，最小值 = 2 × (−1) = −2

$\therefore (M, m)$ = (1, − 2) .

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 2)

已知函數 $f(x)=5\sin x+2\cos x+1$，$\frac{\pi}{4}\le x\le\pi$.
求 $f(x)$的最大值為(1)______________，
此時 $\tan x$ = (2)______________ .

解答 (1)$1+\sqrt{29}$;(2)$\frac{5}{2}$

解析

$f(x)=5\sin x+2\cos x+1=\sqrt{29}(\frac{5}{\sqrt{29}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{29}}\cos x)+1=\sqrt{29}\sin(x+\theta)+1$，

其中 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{29}}$，$\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{29}}$，由於 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{29}}<\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}\Longrightarrow 0<\theta<\frac{\pi}{4}$，

$\frac{\pi}{4}\le x\le\pi\Longrightarrow\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\theta\le x+\theta\le\pi+\theta<\frac{5\pi}{4}$，

當 $x+\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{2}-\theta$ 時，$f(x)$有最大值 $\sqrt{29}\times 1+1=1+\sqrt{29}$，

此時 $\sin x=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{29}}$，

$\cos x=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{29}}$，

$\therefore \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{5}{2}$.

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 3)

設 $f(x)=(\sin x-\sqrt{3}\cos x)^2-4(\sin x-\sqrt{3}\cos x)+3$，
則 $f(x)$的最小值為＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

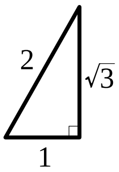
解答　－1

解析

令 $t=\sin x-\sqrt{3}\cos x \Rightarrow -2\le t\le 2$

$f(x)=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

$\therefore t=2$ 時，有最小值 -1．



10-4 正餘弦的疊合(常考題型 4)

若 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，則
(1)$\sin\theta+\cos\theta$ 的最大值為＿＿＿＿＿＿＿＿＿．
(2)$y=4+(\sin\theta+\cos\theta)+\sin 2\theta$，在 $\theta=\alpha$ 弧度時有最大值 M，則序對(α, M)為＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　(1)$\sqrt{2}$；(2)$(\frac{\pi}{4},5+\sqrt{2})$

解析

(1)$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$

$\because 45^\circ\le\theta\le 90^\circ \Rightarrow 90^\circ\le\theta+45^\circ\le 135^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(\theta+45^\circ)\le 1$

$\therefore 1\le\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)\le\sqrt{2}$　$\therefore$最大值為$\sqrt{2}$．

(2)令 $\sin\theta+\cos\theta=t \Rightarrow 1\le t\le\sqrt{2}$

$\therefore t^2=1+2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

$\therefore y=4+t+t^2-1=t^2+t+3=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}$

$\therefore$當 $t=\sqrt{2}$ 時$\Rightarrow M=5+\sqrt{2}$，此時 $\sin(\theta+45^\circ)=1$　$\therefore \theta=45^\circ$

$\therefore (\alpha, M)=(\frac{\pi}{4},5+\sqrt{2})$．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 5)

設 $-30° \le \theta \le 30°$，$f(\theta) = \cos 2\theta + 2\sin\theta$，則
(1) $f(\theta)$ 的最大值為①________，此時 θ=②____________．
(2) $f(\theta)$ 的最小值為①_______，此時 θ = ②___________．

解答 (1)① $\frac{3}{2}$ ② $30°$；(2)① $-\frac{1}{2}$ ② $-30°$

解析

$$f(\theta) = 1 - 2\sin^2\theta + 2\sin\theta = -2(\sin^2\theta - \sin\theta + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} + 1 = -2(\sin\theta - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$$

$\because -30° \le \theta \le 30°$ $\therefore -\frac{1}{2} \le \sin\theta \le \frac{1}{2}$

(1) 當 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 時，$f(\theta)$ 之①最大值為 $\frac{3}{2}$，此時② $\theta = 30°$．

(2) 當 $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ 時，$f(\theta)$ 之①最小值為 $-\frac{1}{2}$，此時② $\theta = -30°$．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 6)

設 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$，則方程式 $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$ 之解 x = ____________．

解答 $\frac{\pi}{6}$

解析

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 60° \cdot \cos x - \cos 60° \cdot \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(60° - x) = \frac{1}{2}$$

$\because -90° < x < 90° \Rightarrow -90° < -x < 90° \Rightarrow -30° < 60° - x < 150°$

$\therefore 60° - x = 30° \Rightarrow x = 30° = \frac{\pi}{6}$．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 7)

函數 $y=\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}$ 的最大值為 M，最小值為 m，求 (M,m)．

解答　$(3,\dfrac{1}{3})$

解析

$y=\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}=\dfrac{-(\sin x+2)+4}{\sin x+2}=-1+\dfrac{4}{\sin x+2}$，

由於 $-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow 1\le \sin x+2\le 3 \Rightarrow \dfrac{4}{3}\le\dfrac{4}{\sin x+2}\le\dfrac{4}{1}\Rightarrow$

$\dfrac{1}{3}\le -1+\dfrac{4}{\sin x+2}\le 3$，

因此，$M=3$，$m=\dfrac{1}{3}$，$(M,m)=(3,\dfrac{1}{3})$．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 8)

已知函數 $f(x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$．

(1)設 $f(x)=r_1\sin(x+\theta_1)$，

其中 $r_1>0$，$0<\theta_1<\pi$，求 r_1，θ_1 的值．

(2)設 $f(x)=r_2\cos(x+\theta_2)$，

其中 $r_2>0$，$0<\theta_2<\pi$，求 r_2，θ_2 的值．

解答　(1) $r_1=2$，$\theta_1=\dfrac{2\pi}{3}$；(2) $r_2=2$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$

解析

將函數化成正弦函數的形式，得

$f(x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x=-2(\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x)=-2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$．

(1)利用恆等式 $-\sin\theta=\sin(\pi+\theta)$，得 $f(x)=2\sin(\pi+x-\dfrac{\pi}{3})=2\sin(x+\dfrac{2\pi}{3})$．

故 $r_1=2$，$\theta_1=\dfrac{2\pi}{3}$．

(2)利用恆等式 $-\sin\theta=\cos(\dfrac{\pi}{2}+\theta)$，得 $f(x)=2\cos(\dfrac{\pi}{2}+x-\dfrac{\pi}{3})=2\cos(x+\dfrac{\pi}{6})$．

故 $r_2=2$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 9)

設 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$f(x)=\cos^2x-4\sin x\cos x-3\sin^2x$ 之最大值為 ________．	

解答　1

解析

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$0\le 2x\le\pi$

$f(x)=\cos^2x-4\sin x\cos x-3\sin^2x=(\cos^2x-\sin^2x)+(1-2\sin^2x)-2(2\sin x\cos x)-1$

$=\cos2x+\cos2x-2\sin2x-1=2\cos2x-2\sin2x-1$

$=2\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})-1$

$\because 0\le 2x\le\pi$　$\therefore \frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}\Rightarrow -1\le\cos(2x+\frac{\pi}{4})\le\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow -2\sqrt{2}-1\le 2\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})-1\le 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-1=1$

$\therefore f(x)$之最大值為 1．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 10)

設 $x+y=\frac{\pi}{3}$，求 $4\sin x+2\sin y$ 的最小值．	

解答　$-2\sqrt{3}$

解析

$\because x+y=\frac{\pi}{3}$　$\therefore y=\frac{\pi}{3}-x$

$\therefore 4\sin x+2\sin y=4\sin x+2\sin(\frac{\pi}{3}-x)=4\sin x+2(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x)$

$=4\sin x+\sqrt{3}\cos x-\sin x=3\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)$

$=2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})$

當 $\sin(x+\frac{\pi}{6})=-1$ 時，最小值為 $-2\sqrt{3}$．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 11)

設 $f(x)=16\cos^3 x-16\sin^3 x-12\cos x+12\sin x$,
其中 $0\le x\le \frac{\pi}{2}$，
(1)當 $x=$①__________時，$f(x)$之最大值為__________.
(2)當 $x=$①__________時，$f(x)$之最小值為__________.

解答 (1)① $\frac{\pi}{12}$ ② $4\sqrt{2}$；(2)① $\frac{5\pi}{12}$ ② $-4\sqrt{2}$

解析

$f(x)=4(4\cos^3 x-3\cos x)+4(3\sin x-4\sin^3 x)=4\cos 3x+4\sin 3x$
$=4\sqrt{2}\sin(3x+\frac{\pi}{4})$

$\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le 3x\le\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le 3x+\frac{\pi}{4}\le\frac{7\pi}{4}\Rightarrow -1\le\sin(3x+\frac{\pi}{4})\le 1$

(1)當 $\sin(3x+\frac{\pi}{4})=1$ 時，有最大值 $4\sqrt{2}$，此時 $3x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{12}$

$\therefore$① $x=\frac{\pi}{12}$．②最大值 $4\sqrt{2}$．

(2)當 $\sin(3x+\frac{\pi}{4})=-1$ 時，有最小值 $-4\sqrt{2}$，此時 $3x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{12}$

$\therefore$① $x=\frac{5\pi}{12}$．②最小值 $-4\sqrt{2}$．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 12)

已知函數 $y=\sin x+a\cos x$ 的圖形對稱於直線 $x=\frac{5\pi}{3}$，
求實數 a 的值．

解答 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析

因為直線 $x=\frac{5\pi}{3}$ 通過圖形的最高點或最低點，所以

$\sin\frac{5\pi}{3}+a\cos\frac{5\pi}{3}=\pm\sqrt{1+a^2}\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{1+a^2}$．

兩邊平方，得 $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{4}a^2=1+a^2$，即 $3a^2+2\sqrt{3}a+1=0\Rightarrow(\sqrt{3}a+1)^2=0$．

解得 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 13)

$-\pi \le x \le 0$，$f(x)=\cos 2x+4\sin^2 x-\cos x-2$， (1)若 $f(x)$之最大值為 M，最小值為 m， 求數對$(M,m)=$ ＿＿＿＿＿＿＿． (2)方程式 $\cos 2x+4\sin^2 x-\cos x-2=0$ 之解為 ＿＿＿＿＿．	

解答　(1)$(\frac{9}{8},-2)$；(2)$-\frac{\pi}{3}$或 $-\pi$

解析

(1)$f(x)=\cos 2x+4\sin^2 x-\cos x-2=2\cos^2 x-1+4(1-\cos^2 x)-\cos x-2$

$$=-2\cos^2 x-\cos x+1=-2(\cos x+\frac{1}{4})^2+\frac{9}{8}$$

$\because -\pi \le x \le 0 \Rightarrow -1 \le \cos x \le 1$

$\therefore$當 $\cos x=-\frac{1}{4}$ 時，有最大值 $M=\frac{9}{8}$；$\cos x=1$ 時，有最小值 $m=-2$

$\therefore (M,m)=(\frac{9}{8},-2)$．

(2)$\cos 2x+4\sin^2 x-\cos x-2=0 \Rightarrow -2\cos^2 x-\cos x+1=0$（由(1)）

$\Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Rightarrow (2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

$\therefore \cos x=\frac{1}{2}$或 -1　$\because -\pi \le x \le 0$　$\therefore x=-\frac{\pi}{3}$或 $-\pi$．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 14)

函數 $f(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$ 之 (1)週期為＿＿＿＿＿＿＿．　(2)振幅為＿＿＿＿＿＿＿． (3)最大值為＿＿＿＿＿＿＿．(4)最小值為＿＿＿＿＿＿＿．	

解答　(1)2π；(2)2；(3)2；(4) -2

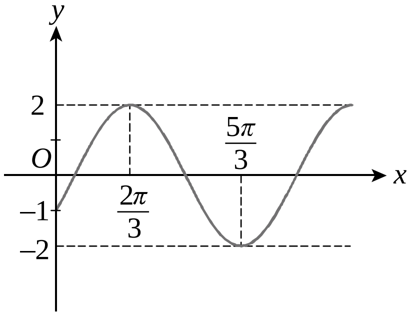
解析

$$f(x)=2(\cos x\cdot\frac{1}{2}-\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{3})=2\cos(x+\frac{\pi}{3})$$

$\therefore$(1)週期 2π．(2)振幅 2．(3)最大值 2．(4)最小值-2．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 15)

如圖是函數 $y = a\sin x + b\cos x$ 圖形的一部分，
求(1)此函數的週期．(2)實數 a，b 的值．



解答　(1)2π；(2)$a=\sqrt{3}$，$b=-1$

解析

(1)　由圖知，週期為$2(\frac{5\pi}{3}-\frac{2\pi}{3})=2\pi$．(2)因為過點$(0,-1)$與$(\frac{2\pi}{3},2)$，所以

$$\begin{cases} a\sin 0 + b\cos 0 = -1 \\ a\sin\frac{2\pi}{3} + b\cos\frac{2\pi}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 2 \end{cases}$$

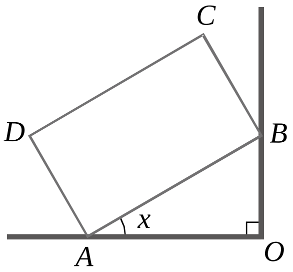
解得$a=\sqrt{3}$，$b=-1$．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 16)

如圖，矩形磚塊斜靠在牆壁上，且 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$，$\overline{BC}=2$，$\angle OAB = x$ ($0<x<\frac{\pi}{2}$).

(1)將 C 點到地面的距離以 x 表示 .

(2)已知 C 點到地面的距離為 $2\sqrt{3}$，求 x .



解答 (1) $2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x$;(2) $\frac{\pi}{6}$

解析

(1)自 C 作直線 OB 的垂線，且交直線 OB 於 E .

(2)依題意，可列得 $2\sqrt{3}\sin x+2\cos x=2\sqrt{3}$.

將方程式的左式化成正弦函數的形式，得

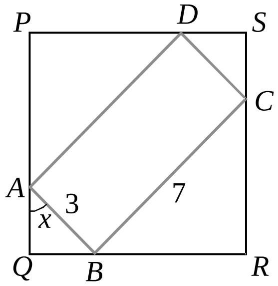
$$2\sqrt{3}\sin x+2\cos x=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)=4(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6})=4\sin(x+\frac{\pi}{6})$$.

代回原方程式，得 $4\sin(x+\frac{\pi}{6})=2\sqrt{3}$，即 $\sin(x+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因為 $0<x<\frac{\pi}{2}$，即 $\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，所以 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，解得 $x=\frac{\pi}{6}$.

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 17)

如圖，矩形 $ABCD$ 的四個頂點分別在矩形 $PQRS$ 的四個邊上．若 $\overline{AB}=3$， $\overline{BC}=7$，且 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AQ}$ 的夾角為 x，則當 x 為多少弧度時，矩形 $PQRS$ 的周長最大?



解答　$20\sqrt{2}$

解析

由題意可推得 $\angle RBC=\angle ADP=\angle BAQ=x$，於是矩形 $PQRS$ 的周長為

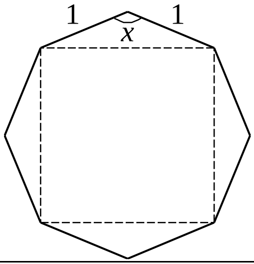
$$2(\overline{PQ}+\overline{QR})=2(7\sin x+3\cos x+3\sin x+7\cos x)=20(\sin x+\cos x)$$

$$=20\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)=20\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4})=20\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\text{ ．}$$

故當 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 時，矩形 $PQRS$ 的周長有最大值 $20\sqrt{2}$ ．

10-4 正餘弦的疊合(常考題型 18)

下圖的八邊形是由腰長為 1，頂角為 x 的四個等腰三角形及它們的四個底邊構成之正方形所組成．請問：當 x 為多少弧度時，這八邊形的面積最大？



解答 $x=\frac{3\pi}{4}$

解析

如下圖，因為等腰三角形的頂角平分線垂直平分底邊，所以等腰三角形的底邊長為 $2\times\sin\frac{x}{2}$．因此，這八邊形的面積為

$$4(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin x)+(2\sin\frac{x}{2})^2=2\sin x+4\times\frac{1-\cos x}{2}=2\sin x-2\cos x+2 \quad =2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)+2$$

$$=2\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4})+2=2\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+2$$ ．

故當 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{3\pi}{4}$ 時，這八邊形的面積有最大值 $2\sqrt{2}+2$ ．