10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 1)

求下列各值：
(1)$\sin 82^\circ \cos 38^\circ + \cos 82^\circ \sin 38^\circ$.
(2)$\cos 17^\circ \cos 28^\circ - \sin 17^\circ \sin 28^\circ$.

解答 (1)$\frac{\sqrt{3}}{2}$;(2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析 (1)$\sin 82^\circ \cos 38^\circ + \cos 82^\circ \sin 38^\circ = \sin(82^\circ + 38^\circ) = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)$\cos 17^\circ \cos 28^\circ - \sin 17^\circ \sin 28^\circ = \cos(17^\circ + 28^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 2)

試求下列各式之值：
(1)$\sin 200^\circ \cos 280^\circ - \sin 100^\circ \cos 160^\circ$.
(2)$\cos 14^\circ \cos 224^\circ + \sin 194^\circ \sin 404^\circ$.

解答 (1)$\frac{\sqrt{3}}{2}$;(2)$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析 (1)$\sin 200^\circ \cos 280^\circ - \sin 100^\circ \cos 160^\circ$

$= (-\sin 20^\circ)(\cos 80^\circ) - (\sin 80^\circ)(-\cos 20^\circ) = \sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ$

$= \sin(80^\circ - 20^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)$\cos 14^\circ \cos 224^\circ + \sin 194^\circ \sin 404^\circ$

$= \cos 14^\circ(-\cos 44^\circ) + (-\sin 14^\circ)\sin 44^\circ = -\cos(14^\circ - 44^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 3)

設 $\sin 35^\circ = a$、$\cos 25^\circ = b$，則下列何者為真?
(1)$|ab| < 1$　(2)$\sin 10^\circ = a - b$　(3)$\sin 10^\circ = ab - \sqrt{1-a^2} \times \sqrt{1-b^2}$
(4)$ab + \sqrt{1-a^2} \times \sqrt{1-b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$　(5)$\cos 10^\circ = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$.

【高雄中學月考】

解答　1345

解析

(1) $|ab| = |\sin 35^\circ \cos 25^\circ| < 1$
(2)(3)$\sin 10^\circ = \sin(35^\circ - 25^\circ) = \sin 35^\circ \cos 25^\circ - \cos 35^\circ \sin 25^\circ = ab - \sqrt{1-a^2} \times \sqrt{1-b^2}$
(4) $ab + \sqrt{1-a^2} \times \sqrt{1-b^2} = \sin 35^\circ \cos 25^\circ + \cos 35^\circ \sin 25^\circ = \sin(35^\circ + 25^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(5)$\cos 10^\circ = \cos(35^\circ - 25^\circ) = \cos 35^\circ \cos 25^\circ + \sin 35^\circ \sin 25^\circ = b\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-b^2}$
故選(1)(3)(4)(5) .

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 4)

$\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A = -\frac{3}{5}$，$\cos B = \frac{12}{13}$，求 $\cos C$ 的值 .

解答　$\frac{56}{65}$

解析

$\cos A = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$，$\cos B = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin B = \frac{5}{13}$

$$\begin{aligned}\cos C &= \cos[180^\circ - (A+B)] \\ &= -\cos(A+B) \\ &= -(\cos A\cos B - \sin A\sin B) \\ &= -\left(-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}\right) = \frac{56}{65}\end{aligned}$$.

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 5)

設 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{2}$， $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{2}{3}$， 求 $\cos(\alpha-\beta)$的值

解答 $\frac{25}{72}$

解析

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{2}$…①， $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{2}{3}$…②

由①^2 + ②^2 得 $(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+2(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=\frac{9}{4}+\frac{4}{9}$

$2\cos(\alpha-\beta)=\frac{25}{36}$

$\therefore\quad \cos(\alpha-\beta)=\frac{25}{72}$.

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 6)

求下列各式的值：

(1) $\frac{\tan 80°-\tan(-55°)}{1+\tan 80°\cdot\tan(-55°)}$. (2) $\frac{\tan 80°+\tan 40°}{1-\tan 80°\cdot\tan 40°}$.

解答 (1) − 1;(2) $-\sqrt{3}$

解析

(1) $\frac{\tan 80°-\tan(-55°)}{1+\tan 80°\cdot\tan(-55°)}=\tan[80°-(-55°)]=\tan 135°=-\tan 45°=-1$.

(2) $\frac{\tan 80°+\tan 40°}{1-\tan 80°\cdot\tan 40°}=\tan(80°+40°)=\tan 120°=-\tan 60°=-\sqrt{3}$

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 7)

求 $\tan 105°$的值：

解答 $-2-\sqrt{3}$

解析 $\tan 105° = \tan(60°+45°) = \dfrac{\tan 60° + \tan 45°}{1-\tan 60° \tan 45°} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{-2} = -2-\sqrt{3}$.

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 8)

求下列各式的值：

(1) $\tan 13° + \tan 32° + \tan 13° \tan 32°$.

(2) $\tan 74° \tan 44° + \sqrt{3}\tan 44° - \sqrt{3}\tan 74°$.

【和平高中月考】

解答 (1)1;(2) − 1

解析

(1)$\because$ $\tan 45° = \tan(13°+32°)$

$\therefore$ $1 = \dfrac{\tan 13° + \tan 32°}{1-\tan 13° \tan 32°}$

$\Rightarrow 1-\tan 13° \tan 32° = \tan 13° + \tan 32°$ $\Rightarrow \tan 13° + \tan 32° + \tan 13° \tan 32° = 1$

(2) $\tan 30° = \tan(74°-44°)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\tan 74° - \tan 44°}{1+\tan 74° \tan 44°}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{3}\tan 74° - \sqrt{3}\tan 44° = 1+\tan 74° \tan 44°$

$\Rightarrow$ $\tan 74° \tan 44° + \sqrt{3}\tan 44° - \sqrt{3}\tan 74° = -1$.

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 9)

設 α，β，γ 為△ABC 的三個內角．已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，求

(1)$\tan\gamma$ 的值．

(2)γ 的度數．

解答　(1)1;(2)45°

解析　(1)因為 $\alpha+\beta+\gamma=180°$，所以利用正切的和角公式，得

$$\tan\gamma=\tan(180°-(\alpha+\beta))=-\tan(\alpha+\beta)=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{\frac{1}{3}+(-2)}{1-\frac{1}{3}\cdot(-2)}=1\ .$$

(2)因為 $0°<\gamma<180°$，且 $\tan\gamma=1$，所以 $\gamma=45°$．

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 10)

令 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 為 $3x^2-5x+1=0$ 之二根，

求 $\tan(\alpha+\beta)=$ ____________．

解答　$\frac{5}{2}$

解析　由根與係數關係

$$\Rightarrow\quad \tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{3}，\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{2}\ .$$

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 11)

設二次方程式 $2x^2-3x-5=0$ 的兩根為 $\tan A$ 與 $\tan B$，且 $\tan A>\tan B$，則下列何者正確？

(1) $\tan(A+B)=\frac{3}{7}$　(2) $\angle A$ 與 $\angle B$ 為同一個象限角　(3) $\tan A>2$

(4) $\tan B<-1$　(5) $\tan(A-B)=-\frac{7}{3}$.

【松山高中月考】

解答　135

解析　$\begin{cases}\tan A+\tan B=\frac{3}{2}\\ \tan A\tan B=-\frac{5}{2}\end{cases}$，且 $\tan A>\tan B\Rightarrow\begin{cases}\tan A=\frac{5}{2}\\ \tan B=-1\end{cases}$.

(1)○：$\tan(A+B)=\dfrac{\frac{3}{2}}{1-(-\frac{5}{2})}=\frac{3}{7}$. (2)╳：$\tan A$，$\tan B$ 異號 $\Rightarrow\angle A$ 與 $\angle B$ 在不同象限 . (3)○：$\tan A>2$. (4)╳：$\tan B=-1$. (5)○：

$\tan(A-B)=\dfrac{\frac{5}{2}-(-1)}{1+\frac{5}{2}\times(-1)}=-\frac{7}{3}$. 故選(1)(3)(5) .

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 12)

右圖為三個大小相同的連續正方形

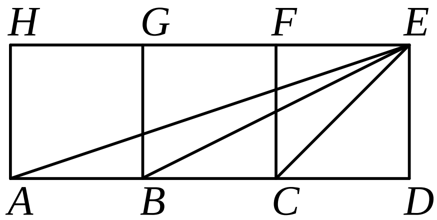
(1)若 $\angle EAD=\alpha$，$\angle EBD=\beta$，

則 $\alpha+\beta=$____________ .

(2)若 $\angle AEB=\gamma$，$\angle BEC=\delta$，

則 $\tan\gamma=$ ①____________，

$\tan\delta=$ ②____________ .



解答　(1)45°;(2)① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{3}$

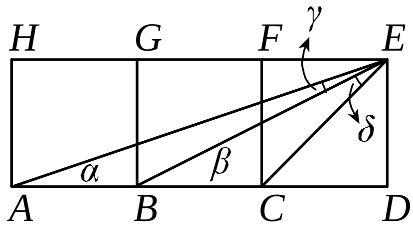
解析　(1) $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}}=1$

$\therefore\ \alpha+\beta=45°$.　(2)$\triangle BED$ 中，$\tan(45°+\delta)=2\ \Rightarrow$

$\dfrac{\tan 45°+\tan\delta}{1-\tan 45°\cdot\tan\delta}=2\ \Rightarrow\ \tan\delta=\frac{1}{3}$.　$\triangle ABE$ 中，

$\beta=\gamma+\alpha\ \Rightarrow\ \tan\beta=\tan(\gamma+\alpha)\ \Rightarrow$

$\frac{1}{2}=\dfrac{\tan\gamma+\tan\alpha}{1-\tan\gamma\cdot\tan\alpha}=\dfrac{\tan\gamma+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}\tan\gamma}\Rightarrow\ \tan\gamma=\frac{1}{7}$.



10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 13)

已知 θ 為第三象限角，且 $\cos\theta=-\frac{3}{4}$，則下列何者正確?

(1) $\sin 2\theta=-\frac{3\sqrt{7}}{8}$　(2) $\cos 2\theta=\frac{1}{8}$　(3) $\tan 2\theta=-3\sqrt{7}$

(4) $\cos 2\theta=-\frac{1}{8}$　(5) $\sin 2\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

【師大附中月考】

解答　25

解析

θ 屬於第三象限，$\cos\theta=-\frac{3}{4}$　$\Rightarrow$　$\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot(-\frac{\sqrt{7}}{4})(-\frac{3}{4})=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$

$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=3\sqrt{7}$

故選(2)(5) .

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 14)

下列選項當中何者的值最大?

(1)$\sin 20°\cos 20°$　(2)$\sin 35°\cos 35°$　(3)$\sin 50°\cos 50°$

(4)$\sin 65°\cos 65°$　(5)$\sin 80°\cos 80°$

解答　3

解析

利用 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ，得

(1)$\sin 20°\cos 20°=\frac{1}{2}\sin 40°$

(2)$\sin 35°\cos 35°=\frac{1}{2}\sin 70°$

(3)$\sin 50°\cos 50°=\frac{1}{2}\sin 100°=\frac{1}{2}\sin 80°$

(4)$\sin 65°\cos 65°=\frac{1}{2}\sin 130°=\frac{1}{2}\sin 50°$

(5)$\sin 80°\cos 80°=\frac{1}{2}\sin 160°=\frac{1}{2}\sin 20°$

因為 $\sin 80°>\sin 70°>\sin 50°>\sin 40°>\sin 20°$，故選(3) .

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 15)

已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{5}$，求 $\sin 2\theta$ 的值．	

解答　$-\frac{21}{25}$

解析

將原式的等號兩邊平方，得

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{4}{25}\Rightarrow\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{25}$．

即 $1+\sin 2\theta=\frac{4}{25}$，故 $\sin 2\theta=-\frac{21}{25}$．

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 16)

設 $\sin\theta$ 為方程式 $4x^2+4x-3=0$ 的一根，求 $\cos 2\theta$ 的值．	

解答　$\frac{1}{2}$

解析

解方程式 $4x^2+4x-3=0\Rightarrow(2x-1)(2x+3)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$．

因為 $-1\leq\sin\theta\leq 1$，所以 $\sin\theta=\frac{1}{2}$．

利用二倍角公式，得 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$．

10-3 和差角與半倍角公式(常考題型 17)

試求下列各式的值：
(1)$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.
(2)$\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$.

解答　(1)$\frac{1}{8}$;(2)$\frac{1}{16}$

解析

(1)[解一]

原式$=\dfrac{2^3\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2^3\sin 20^\circ}=\dfrac{2^2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2^3\sin 20^\circ}=\dfrac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{2^3\sin 20^\circ}$

$=\dfrac{\sin 160^\circ}{2^3\sin 20^\circ}=\dfrac{1}{8}$.

[解二]

利用 $\cos\theta\cdot\cos(60^\circ-\theta)\cdot\cos(60^\circ+\theta)=\dfrac{1}{4}\cos 3\theta$

令 $\theta=20^\circ$，原式$=\dfrac{1}{4}\cos 60^\circ=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{8}$.

(2)原式$=\cos 84^\circ\cos 48^\circ\cos 24^\circ\cos 12^\circ=\dfrac{2^4\sin 12^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ(-\cos 96^\circ)}{2^4\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{-\sin 192^\circ}{2^4\sin 12^\circ}=\dfrac{1}{16}$.