10-1 弧度量(常考題型 1)

問：(1)$22.5^\circ=$________弧度．

(2)$-105^\circ=$________弧度．

解答　(1)$\frac{\pi}{8}$；(2)$-\frac{7\pi}{12}$

解析　(1)$22.5^\circ=22.5\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{8}$（弧度）．(2)$-105^\circ=-105\times\frac{\pi}{180}=-\frac{7\pi}{12}$（弧度）．

10-1 弧度量(常考題型 2)

下表是度與弧度的換算，試將其中空格填上：

度	0°	30°		90°		150°	270°	480°	-144°	
弧度			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$					$-\frac{\pi}{9}$

解答　見解析

解析

度	0°	30°	45°	90°	120°	150°	270°	480°	-144°	-20°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{5}$	$-\frac{\pi}{9}$

10-1 弧度量(常考題型 3)

設 θ 與 -55（弧度）為同界角，且 $0 \leq \theta < 2\pi$,
求 $\theta =$ ____________弧度．

解答　$-55+18\pi$

解析　$-55=(-3.14)\times 18+1.52$
$\therefore \theta=-55+18\pi$．

10-1 弧度量(常考題型 4)

已知△ABC的三內角度量成等差，其最小角與最大角分別以度度量與弧度量表出之值，其比數為 $60^{\circ}:\pi$，求三內角分別為____________．

解答　$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$

解析　設三內角之弳度量為 $a-d$, a, $a+d$（$a>d>0$）
則 $(a-d)+a+(a+d)=\pi \Rightarrow a=\frac{\pi}{3}$
由已知 $\frac{(a-d)\times\frac{180}{\pi}}{a+d}=\frac{60}{\pi} \Rightarrow (a-d)\times 3=a+d$
$\therefore d=\frac{1}{2}a=\frac{\pi}{6}$　$\therefore$三內角為 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$．

10-1 弧度量(常考題型 5)

若三角形三內角度數的比為 5：6：7，則此三角形最大內角是多少弧度？	

解答 $\frac{7\pi}{18}$ 弧度

解析 因為三內角和為 180°，所以最大內角為 $180\times\frac{7}{5+6+7}=70$ 度，

即 $70\times\frac{\pi}{180}=\frac{7\pi}{18}$ 弧度．

10-1 弧度量(常考題型 6)

時鐘的長針為 10 公分，問從上午 9:40 到 10:15，長針掃過的面積為____________平方公分．	

解答 $\frac{175\pi}{3}$

解析 由 9:40 到 10:15，長針所掃過的圓心角 $\theta=2\pi\times\frac{7}{12}=\frac{7\pi}{6}$

故面積 $=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{7\pi}{6}=\frac{175\pi}{3}$（平方公分）.

10-1 弧度量(常考題型 7)

設一扇形之半徑為 2，面積為 5， 求此扇形圓心角為＿＿＿＿＿＿＿＿（弧度）.	

解答 $\frac{5}{2}$

解析 扇形面積 $=\frac{1}{2}r^2\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\times 2^2\times\theta=5$ $\therefore \theta=\frac{5}{2}$（弧度）.

10-1 弧度量(常考題型 8)

有一個圓，半徑是 10 公分，圓心角為 $\frac{\pi}{6}$，則此圓心所對的弧 長為 a 公分，則 a = ＿＿＿＿＿＿＿＿ .	

解答 $\frac{5\pi}{3}$

解析 弧長 $a=\theta\times r=\frac{\pi}{6}\times 10=\frac{5\pi}{3}$.

10-1 弧度量(常考題型 9)

設一扇形的周長為 20，則當此扇形面積為最大時，
(1)圓心角為＿＿＿＿＿＿＿＿.
(2)半徑為＿＿＿＿＿＿＿＿.
(3)面積最大值為＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　(1)2;(2)5;(3)25

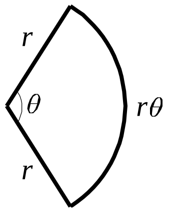
解析　周長 $s=2r+r\theta=20$，面積 $A=\frac{1}{2}r^2\theta$，

$\frac{2r+r\theta}{2}\geq\sqrt{2r\cdot r\theta}=\sqrt{2r^2\theta}\Longrightarrow 10\geq\sqrt{4A}\Longrightarrow A\leq 25$，

面積最大為 25，

此時 $2r=r\theta\Rightarrow\theta=2$，$4r=20\Rightarrow r=5$，

故圓心角為 2，半徑為 5，面積最大值為 25.



10-1 弧度量(常考題型 10)

已知扇形的面積為 1，弧長為 2，求其圓心角的弧度.

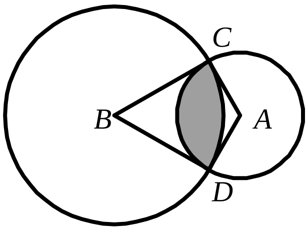
解答　2 弧度

解析　設圓心角為 θ（弧度），半徑為 r，則 $\begin{cases}\frac{1}{2}r^2\theta=1\cdots\cdots①\\ r\theta=2\cdots\cdots②\end{cases}$

由 $\frac{①}{②}$ 得 $\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}\Rightarrow r=1$，代入①得 $\theta=2$（弧度）.

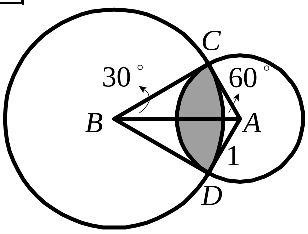
10-1 弧度量(常考題型 11)

如圖，點 A 與點 B 為兩圓之圓心，若圓 A 之半徑為 1 公分，$\angle CAD = 120^\circ$，$\angle CBD = 60^\circ$，
則鋪色區域之面積為____________平方公分 .



解答　$\dfrac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$

解析　由圖

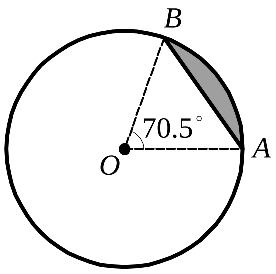


$\because \angle CAB = 60^\circ$，$\angle CBA = 30^\circ$ $\therefore \angle BCA = \angle BDA = 90^\circ$

又 $\overline{AC}=1$，$\therefore \overline{BC}=\sqrt{3}$ 所求 $=\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\dfrac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$.

10-1 弧度量(常考題型 12)

如圖，圓之半徑為 8 公分，弦 AB 之圓心角為 70.5°，試求此弦所對應的弓形（鋪色區）的面積為____________平方公分 .（依四捨五入取到小數點第一位，已知 $\sin 70.5^\circ = 0.9426$）



解答　9.2

解析　$70.5^\circ=\dfrac{70.5\pi}{180}$

$\therefore$ 所求 $=\dfrac{1}{2}\times 8^2\times\dfrac{70.5}{180}\times 3.14-\dfrac{1}{2}\times 8^2\times\sin 70.5^\circ \fallingdotseq 39.35-30.16 \fallingdotseq 9.2$.

10-1 弧度量(常考題型 13)

設 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5 五點將一圓周分成五段弧，其長成等差數列，若最長弧與最短弧的弧長之比為 6：1，則(1)最短弧之圓心角為＿＿＿＿＿＿＿徑．(2)五邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 之①最大內角之徑度量為＿＿＿＿＿＿＿．②最小內角之徑度量為＿＿＿＿＿．

解答 (1)$\frac{4\pi}{35}$；(2)①$\frac{57\pi}{70}$ ②$\frac{27\pi}{70}$

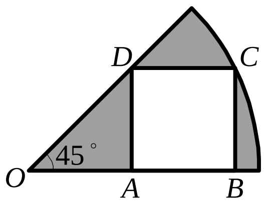
解析 設以 S_1，S_2，S_3，S_4，S_5 表五段弧之長，其所對之中心角為 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4，θ_5，因弧長成等差數列，故中心角亦成等差數列$(\theta_i=\frac{S_i}{r})$

令公差為 d，則$\begin{cases}(\theta_3-2d)+(\theta_3-d)+\theta_3+(\theta_3+d)+(\theta_3+2d)=2\pi \\ \frac{\theta_3+2d}{\theta_3-2d}=\frac{\frac{S_5}{r}}{\frac{S_1}{r}}=\frac{S_5}{S_1}=\frac{6}{1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_3=\frac{2\pi}{5} \\ d=\frac{5}{14}\theta_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_3=\frac{2\pi}{5} \\ d=\frac{\pi}{7}\end{cases}$

$\Rightarrow\theta_1=\frac{4\pi}{35}$，$\theta_2=\frac{9\pi}{35}$，$\theta_4=\frac{19\pi}{35}$，$\theta_5=\frac{24\pi}{35}$

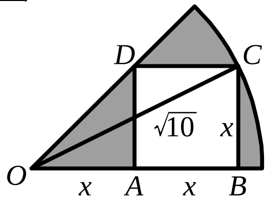
10-1 弧度量(常考題型 14)

如下圖，已知扇形的圓心角為 45°，半徑為 $\sqrt{10}$，且四邊形 $ABCD$ 為內接正方形，求鋪色區域的面積．



解答 $\frac{5\pi}{4}-2$

解析 設內接正方形的邊長為 x．



因為 $\angle AOD=45°$，所以 $\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{BC}=x$．

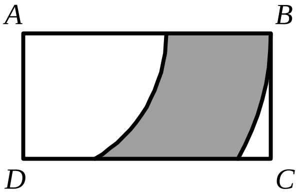
利用畢氏定理，得 $(2x)^2+x^2=(\sqrt{10})^2\Rightarrow5x^2=10\Rightarrow x=\sqrt{2}$．

因此，面積 ＝ 原扇形面積 － 正方形 $ABCD$ 面積

$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\frac{\pi}{4}-(\sqrt{2})^2=\frac{5\pi}{4}-2$．

10-1 弧度量(常考題型 15)

圖中，$\overline{AB}=4\sqrt{3}$，$\overline{AD}=2\sqrt{3}$，在矩形 $ABCD$ 中，以 A 為圓心，4 及 $4\sqrt{3}$ 為半徑作兩弧，則圖中鋪色部分的面積為____________.



解答 $\dfrac{4\pi}{3}+4\sqrt{3}$

解析 $\overline{AE}=\overline{AF}=4$，$\overline{AB}=\overline{AG}=4\sqrt{3}$，

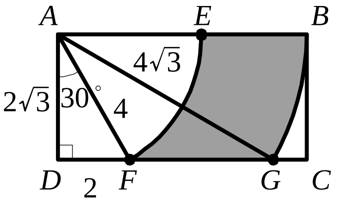
$\therefore \angle DAF=30^\circ$，$\angle DAG=60^\circ$，$\angle GAE=30^\circ$，$\overline{DG}=6 \Rightarrow \overline{FG}=4$

$\triangle AFG$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，

扇形 $AFE=\pi\cdot 4^2\cdot\dfrac{60^\circ}{360^\circ}=\dfrac{8\pi}{3}$，扇形 $ABG=\pi\cdot(4\sqrt{3})^2\cdot\dfrac{30^\circ}{360^\circ}=4\pi$

$\therefore$鋪色部分面積 $=$ 扇形 $ABG+\Delta AFG-$ 扇形 AFE

$=4\pi+4\sqrt{3}-\dfrac{8\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}+4\sqrt{3}$.

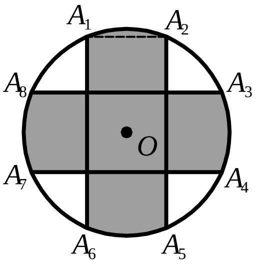


10-1 弧度量(常考題型 16)

如圖，A_1、A_2、…、A_8 等八個點，依次將圓周八等分，若圓半徑為 1，

則(1)線段 $\overline{A_1A_2}$ 長為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

(2)鋪色部分面積為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．



解答　(1)$\sqrt{2-\sqrt{2}}$；(2)$\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-2$

解析　(1)設圓心為 O，因 A_1、A_2、…、A_8 將圓周八等分

$\therefore \angle A_1OA_2=\frac{1}{8}\times 2\pi=\frac{\pi}{4}$

於△A_1OA_2 與△A_2OA_5 中，由餘弦定理知

$\overline{A_1A_2}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\frac{\pi}{4}=2-\sqrt{2}\Rightarrow\overline{A_1A_2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ．

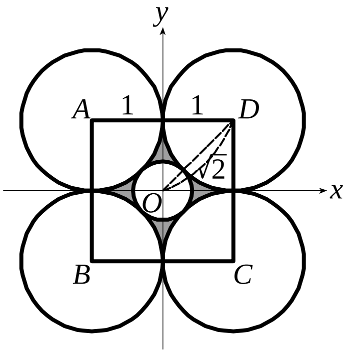
(2)$\overline{A_2A_5}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\frac{3\pi}{4}=2+\sqrt{2}\Rightarrow\overline{A_2A_5}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$

鋪色部分面積=4(弓形 A_1A_2) + 2(矩形 $A_1A_2A_5A_6$) −(中央的正方形)

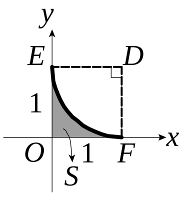
$=4(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{4})+2(\sqrt{2-\sqrt{2}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}})-(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2=\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-2$ ．

10-1 弧度量(常考題型 17)

如圖，$ABCD$ 為正方形，邊長為 2，四個等圓的圓心分別為 A、B、C、D，試求鋪色部分之面積．



解答	$4-(4-2\sqrt{2})\pi$
解析	先求下圖 S 之面積



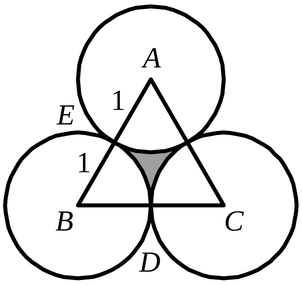
即 $S=$ 正方形 $OEDF$ 面積 $-$ 扇形 DEF 面積 $=1^2-\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{4}$

$\therefore$所求鋪色部分面積

$=4\times S-$（夾在裡面小圓的面積）$=4(1-\frac{\pi}{4})-\pi(\sqrt{2}-1)^2=4-(4-2\sqrt{2})\pi$ ．

10-1 弧度量(常考題型 18)

如圖，設半徑為 1 的三個圓互相外切，則此三個圓間所圍鋪色區域的(1)面積為______________．(2)周長為______________．



解答　(1) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$；(2) π

解析　半徑為 1 的三個圓之圓心所連成的$\triangle ABC$是正三角形,每邊長為 2

故$\triangle ABC$的面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$

但圓心角$\angle ABC$為$\frac{\pi}{3}$

得扇形 BDE 的面積是$\frac{1}{2}\times(1)^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

∴(1)所求鋪色區域的面積為$\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\times 3=\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$．

(2)所求鋪色區域的周長為$3(1\times\frac{\pi}{3})=\pi$．

10-1 弧度量(常考題型 19)

設地球是一個半徑 6400 公里的球體，在地球赤道的大圓上規定圓心角為 1 分（1° ＝ 60 分）時所對的赤道弧長為 1 浬，若 $\pi=3.1416$，

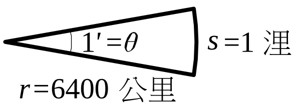
則 1 浬 ＝ ______________公里．(取至小數以下第三位)

解答　1.862

解析　$\theta=1'=(\frac{1}{60})^\circ=\frac{1}{60}\times\frac{\pi}{180}\fallingdotseq\frac{1}{60}\times\frac{3.1416}{180}\fallingdotseq 0.000291$

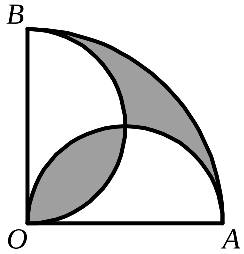
∵$s=r\theta$

∴1 浬 ＝ 6400 × 0.000291 ＝ 1.8624≒1.862（公里）.



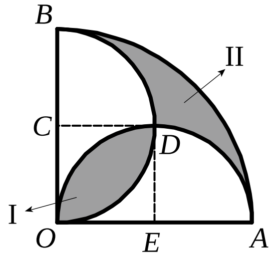
10-1 弧度量(常考題型 20)

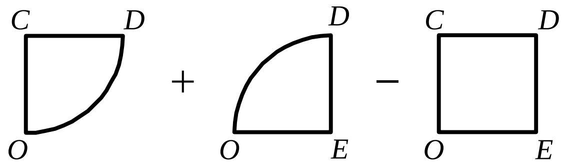
如圖，以$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為直徑在$\frac{1}{4}$圓 OAB 內部各作半圓，求鋪色部分之面積．($\overline{OA}=\overline{OB}=a$)



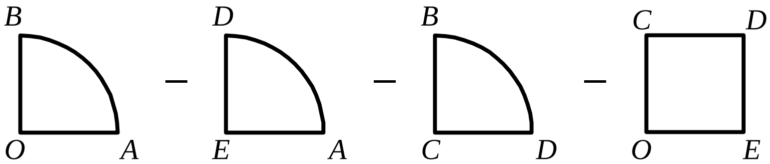
解答 $(\frac{\pi-2}{4})a^2$

解析



I =


$=2\times\frac{1}{4}\times(\frac{a}{2})^2\pi-(\frac{a}{2})^2=\frac{(\pi-2)a^2}{8}$

II =


$=\frac{1}{4}a^2\pi-2\times\frac{1}{4}\times(\frac{a}{2})^2\pi-(\frac{a}{2})^2=\frac{(\pi-2)a^2}{8}$

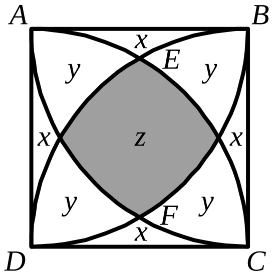
∴鋪色部分之面積為$(\frac{\pi-2}{8})a^2+(\frac{\pi-2}{8})a^2=(\frac{\pi-2}{4})a^2$．

10-1 弧度量(常考題型 21)

邊長為 a 之正方形，以各頂點為圓心，邊長為半徑，各向圓內部作一圓弧（如下圖），求：

(1)此圓弧圍成圖形之面積為何?

(2)$\overline{EF}$ 長度．



解答 (1) $(1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3})a^2$；(2) $(\sqrt{3}-1)a$

解析 (1) $4x+4y+z=a^2 \cdots$①

$2x+3y+z=\frac{1}{4}\times\pi\times a^2=\frac{\pi}{4}a^2 \cdots$②

$x+2y+z=\frac{1}{6}$圓面積 × 2 − 三角形面積$(\Delta CDE)=\frac{1}{6}\times\pi\times a^2\times 2-\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdots$③

解①②③得 $z=(1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3})a^2$ ．

(2) $\overline{EF}=(E$ 到 $\overline{DC}$ 之距離$)+(F$ 到 $\overline{AB}$ 之距離$)-\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a-a=(\sqrt{3}-1)a$ ．