1-1 數與數線(常考題型 1)

1. (1)$0.2\overline{37}$化為有理數 $=$ ______________．(2)$3.05\overline{237}$化為分數為_________。	

1. 解答 (1)$\dfrac{47}{198}$ (2) $\dfrac{25411}{8325}$

1-1 數與數線(常考題型 2)

1. 設 a，b，x，y 均為正整數，$a>b$，$x>y$，比較下列兩組數的大小． (1)$\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{a+x}{b+x}$，$\dfrac{a+y}{b+y}$．　(2)$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{b+x}{a+x}$，$\dfrac{b+y}{a+y}$．	

1. 解答 (1)$\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+y}{b+y}>\dfrac{a+x}{b+x}$;(2)$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+y}{a+y}<\dfrac{b+x}{a+x}$

解析 (1)$\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+y}{b+y}=\dfrac{(a-b)y}{b(b+y)}>0$（因為 $a>b$），

$\dfrac{a+y}{b+y}-\dfrac{a+x}{b+x}=\dfrac{(a-b)(x-y)}{(b+y)(b+x)}>0$（因為 $a>b$，$x>y$），故

$\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+y}{b+y}>\dfrac{a+x}{b+x}$（$>1$）．比 1 大的分數，當分子分母同時加一正數時，其值會變小．

(2)仿(1)可得$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+y}{a+y}<\dfrac{b+x}{a+x}$（$<1$），比 1 小的正分數，當分子分母同時加一正數時，其值會變大．

1-1 數與數線(常考題型 3)

1. 化簡$0.\overline{32}+0.\overline{210}$為一個循環小數 $=$ ＿＿＿＿＿＿.

1. 解答　$0.\overline{533442}$

解析 $\because [2,3]=6$,新數的循環節為 6 位,所求$=0.\overline{323232}+0.\overline{210210}=0.\overline{533442}$.

1-1 數與數線(常考題型 4)

1.設$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 求$\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$之值.

1. 解答　2

解析

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sqrt{1+x}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{1-x}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{1}{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{2}{3+\sqrt{3}}+\frac{2}{3-\sqrt{3}}=\frac{2(3-\sqrt{3})+2(3+\sqrt{3})}{9-3}=\frac{12}{6}=2$$

1-1 數與數線(常考題型 5)

1. 化簡下列各式： (1)$\sqrt{588}$. (2)$4\sqrt{27}-2\sqrt{3}+\sqrt{50}+\sqrt{98}$. (3)$(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. (4)$\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.	

1. 解答 (1)$14\sqrt{3}$;(2)$10\sqrt{3}+12\sqrt{2}$;(3)$-\sqrt{6}$;(4)$-2\sqrt{5}$

解析 (1)$\sqrt{588}=\sqrt{2^2\times3\times7^2}=14\sqrt{3}$

(2)$4\sqrt{27}-2\sqrt{3}+\sqrt{50}+\sqrt{98}=12\sqrt{3}-2\sqrt{3}+5\sqrt{2}+7\sqrt{2}=10\sqrt{3}+12\sqrt{2}$.

(3)$(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})=2\sqrt{6}-6+6-3\sqrt{6}=-\sqrt{6}$.

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})-2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=-2\sqrt{5}$.

1-1 數與數線(常考題型 6)

1. 有一個最簡分數，其分子與分母之和為 70，若將此分數化為小數，並將第二位小數四捨五入得 0.6 一數，則此分數為__________ .	

1. 解答 $\dfrac{27}{43}$

解析 設所求為$\dfrac{70-p}{p}$（p 為正整數，$1\le p<70$，$(p,70-p)=1$），則

$0.55\le\dfrac{70-p}{p}<0.65\Rightarrow0.55p\le70-p<0.65p$ 左式 $\Rightarrow p\le45\ldots$，右式 $\Rightarrow p>42\ldots$，$\therefore p=43$、44、45，$\therefore$此分數可能為$\dfrac{27}{43}$或$\dfrac{26}{44}$或$\dfrac{25}{45}$（後二者不合）.

1-1 數與數線(常考題型 7)

1. 比較$\sqrt{7}-\sqrt{2}$與$\sqrt{8}-\sqrt{3}$的大小．	

1. 解答　$\sqrt{8}-\sqrt{3}<\sqrt{7}-\sqrt{2}$

解析　$\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{5}$，

$\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{5}$，

表示$\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}>\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{8}-\sqrt{3}<\sqrt{7}-\sqrt{2}$．

1-1 數與數線(常考題型 8)

1. 已知$\sqrt{11}$的整數部分為a，小數部分為b，求$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{b}$的值．	

1. 解答　$-\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

解析　因為$3^2<11<4^2$，所以$3<\sqrt{11}<4$，即$a=3$，$b=\sqrt{11}-3$．

故$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{11}-3}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{11}+3}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{11}+3}{2}=-\dfrac{\sqrt{11}}{2}$．

1-1 數與數線(常考題型 9)

1. 選出正確的選項： (1)若 a^2 為有理數，且 a^3 為有理數，則 a 為有理數 (2)若 $a+b$ 與 $a-b$ 都是有理數，則 a，b 都是有理數 (3)若 a，b 都是無理數，則 $a+b$ 為無理數 (4)若 a 是有理數，b 是無理數，則 $a+b$ 為無理數 (5)若 a 是有理數，b 是無理數，則 ab 為無理數．	

1. 解答　124

1-1 數與數線(常考題型 10)

1. 設 x 與 y 都是有理數，且 $\sqrt{3}(x+\sqrt{3})+y(1-3\sqrt{3})=0$， 則 $x+y=$______________．	

1. 解答　-12

解析　$\sqrt{3}x+3+y-3\sqrt{3}y=0\Rightarrow(3+y)+\sqrt{3}\ (x-3y)=0$，$\because x$，$y$ 為有理數$\therefore\begin{cases}3+y=0\\x-3y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-9\\y=-3\end{cases}$，故 $x+y=-12$．

1-1 數與數線(常考題型 11)

1. 已知實數 x，y 滿足 $\lvert x+y\rvert+(2x-y-15)^2=0$，求 x，y 的值．	

1. 解答　$x=5$，$y=-5$

解析　因為 x，y 都是實數，所以 $\lvert x+y\rvert\geq 0$ 且 $(2x-y-15)^2\geq 0$，因此，只有當 $x+y=0$ 和 $2x-y-15=0$ 時，原式才成立．即

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y-15=0 \end{cases}，解得\ x=5，y=-5\ ．$$

1-1 數與數線(常考題型 12)

1. 若 $x>y$，$m>n$，選出正確的選項： (1)$x-m>y-n$　(2)$x-n>y-m$　(3)$xm>yn$ (4)$x^2>y^2$　(5)$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$ ．	

1. 解答　2

1-1 數與數線(常考題型 13)

1. 利用乘法公式，因式分解下列各式：
   (1)x^6-y^6．　　　(2)$9x^4+5x^2+1$．

1. 解答　(1)$(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$;(2)$(3x^2-x+1)(3x^2+x+1)$

1-1 數與數線(常考題型 14)

1. 設 $x=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$， $y=\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$，求下列各式的值：
   (1)$x+y$．　(2)x^2+y^2．　(3)x^3+y^3．

1. 解答　(1)18;(2)322;(3)5778

解　析 (1)　$x+y=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{(\sqrt{5}-2)^2+(\sqrt{5}+2)^2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=18$．(2) 又 $xy=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\times\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=1$，$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=18^2-2=322$．

(3)$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=18^3-3\times1\times18=5778$．

1-1 數與數線(常考題型 15)

1. 面積為 25 的所有矩形中，哪一種矩形的周長為最短，此時周長 = ？

1. 解答　長、寬相等時，其周長 20 為最短